

Zur Nukleonenverteilung in schweren Kernen nach dem Schalenmodell

von

CARL-HEINRICH von KENSCHITZKI

Zur Nukleonenverteilung in schweren Kernen
nach dem Schalenmodell

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig - Maximilians - Universität
zu
München



vorgelegt
von
Carl-Heinrich von Kenschitzki
aus
München
Dezember 1958

Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp
Tag der mündlichen Prüfung: **24. Juni 1959**

I n h a l t

Einleitung	Seite
Kapitel I	1
Messergebnisse zur Dichteverteilung in schweren Kernen	2
§ 1 : Allgemeines	2
§ 2 : Streuung von Elektronen	3
§ 3 : Gebundene μ -Mesonen	7
§ 4 : Neutronen - Streuung	9
§ 5 : Protonen - Streuung	10
Kapitel II	
Dichteverteilungen aus Einteilchenpotentialen	
§ 6 : Zum Schalenmodell	11
§ 7 : Das Argument von Johnsen-Teller und eine Untersuchung von Wilets	12
§ 8 : Berechnungen an den Kernen $^{128}_{52}\text{Te}$ und $^{176}_{70}\text{Yb}$	15
§ 9 : Geschwindigkeitsabhängige Potentiale für den Kern $^{197}_{79}\text{Au}$	20
Kapitel III	
Diskussion der Ergebnisse	
§ 10 : Dichteverteilungen und Eigenwerte	24
§ 11 : Kritik der Potentiale	27
Zusammenfassung	29
Literaturverzeichnis	31
Abbildungen	
Anhang	
Eigenfunktionen zu § 8	
Normierungsintegrale zu § 8	
Eigenfunktionen zu § 9	
Normierungsintegrale zu § 9	
Beispiele zur Eigenwertbestimmung	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555216_0069

Einleitung

Seit längerer Zeit steht die Frage offen, ob Neutronen und Protonen in schweren Kernen gleichmäßig verteilt sind oder ob die Randzone im wesentlichen von Neutronen besetzt ist. Entgegen der zunächst naheliegenden Annahme, wonach in der Randzone wegen Coulomb'scher Abstossungskräfte eine Anhäufung von Protonen stattfindet, haben mehrere Autoren¹⁾²⁾³⁾⁴⁾ auf der Basis der Vorstellungen des Schalenmodells vermutet, daß vielmehr umgekehrt eine Neutronenanhäufung in der Randzone vorliegen sollte. Hierbei handelte es sich um qualitative Abschätzungen der Pauschalpotentiale für Protonen und Neutronen und ihre Wirkungen auf die Nukleonen. Der zu erwartende Unterschied in der Dichteverteilung ist jedoch von einer solchen Größenordnung²⁾, daß in qualitativen Abschätzungen keine gültige Aussage des verwendeten Kernmodells gesehen werden darf.

Die vorliegende Arbeit hat die Aufgabe, auf die obige Frage eine quantitative Antwort zu geben. Insbesondere wird hierzu das Schalenmodell in einer verbesserten Form unter Berücksichtigung geschwindigkeitsabhängiger Einteilchenpotentiale benutzt.

Kapitel I behandelt zunächst die wichtigsten Messergebnisse zur Dichteverteilung in schweren Kernen.

Im Kapitel II sollen die zugrunde liegenden Vorstellungen besprochen werden. Eine erste Abschätzung mit lokalen Einteilchenpotentialen ohne Spin-Bahn-Kopplung ergibt einen geringen Unterschied in den Dichteverteilungen für Protonen und Neutronen. Sodann erfolgt die genaue Durchrechnung des Einteilchenmodells unter Verwendung geschwindigkeitsabhängiger Potentiale mit Spin-Bahn-Kopplung. Die nach der ersten Abschätzung vermuteten Unterschiede in den Dichteverteilungen können nicht bestätigt werden.

Kapitel III endlich umfaßt die physikalische Interpretation der Ergebnisse, während Kapitel IV eine Zusammenfassung gibt. Ein Anhang enthält das Literaturverzeichnis, die verwendeten Bezeichnungen und sämtliche aufgesuchten Eigenfunktionen sowie deren Normierungsintegrale. Diese Eigenfunktionen mit Normierungsintegralen und die dazugehörigen Eigenwerte wurden auf einer Integrieranlage der Siemens-Schuckertwerke AG in Erlangen ermittelt.

Kapitel I

Meßergebnisse zur Dichteverteilung in schweren Kernen

§ 1 : Allgemeines

Wir wollen uns im Folgenden auf Kerne mit verschwindendem Quadrupolmoment beschränken, was eine lediglich radiale Abhängigkeit des Dichteverlaufes in Bezug auf ein im Kernmittelpunkt festes Koordinatensystem bedeutet.

Bei den verschiedenen Meßmethoden ist insbesondere zwischen elektrischen und nuklearen Wechselwirkungen der Probeteilchen mit dem Kern zu unterscheiden, wobei

eine auf elektrischer Wechselwirkung beruhende Messung im Allgemeinen ein zuverlässigeres Ergebnis darstellt. Da bekanntlich jedes Streuexperiment auf eine Potentialbestimmung für das Probeteilchen hinausläuft, kann für die wohlbekannte Coulomb-Wechselwirkung eine direkte Aussage über die das gemessene Coulomb-Potential erzeugende Ladungsverteilung gemacht werden. Eine auf Kernkräften beruhende Messung benötigt dagegen zusätzliche Annahmen über die nukleare Wechselwirkung, um mit Hilfe eines geeigneten Kernkraft-Potential-Modells auf eine Dichteverteilung zu schließen, die die gemessene Winkelverteilung der gestreuten Teilchen erzeugt.

Es ist deshalb verständlich, daß die genauesten Messungen zur Dichteverteilung im Kern die Protonenverteilung betreffen. Über die besten Ergebnisse wird in den folgenden §§ kurz berichtet, ohne auf die verschiedenen Methoden näher einzugehen. Beim Vergleich der Ergebnisse muß berücksichtigt werden, daß die Interpretation des Begriffes "Kernradius" von der Meßmethode abhängt.

§ 2 : Streuung von Elektronen

Unter allen Experimenten zur Ermittlung der Ladungsdichteverteilung stellt die Streuung von Elektronen bekanntlich das weitaus aufschlußreichste Verfahren dar. Dies gilt besonders für die Streuung schneller Elektronen, bei denen zahlreiche Drehimpulszustände am Streuprozess beteiligt sind. Hierdurch können Messungen höherer Momente der Ladungsverteilung erfolgen, die eine Wahl mehrerer Parameter für die funktionelle Form des anzupassenden Dichteverlaufes ermöglichen.

Für eine Energie der gestreuten Elektronen unterhalb von 15 MeV hat die endliche Ladungsausdehnung des Kerns praktisch nur eine Phasenverschiebung der S-Welle gegenüber deren Wert für die Streuung am punktförmigen Zentrum zur Folge. Für diesen Fall ist gezeigt worden⁵⁾,

daß die Streuung stets den Erwartungswert für den quadratischen Radius der Ladungsverteilung mißt:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^\infty r^2 s^{(1)}(r) r^2 dr \quad (1)$$

(r : Ortskoordinate, Z : Kernladungszahl, $s^{(1)}(r)$: Ladungsdichte)

Später wurde gefunden, daß dies auch noch für höhere Energien der Fall ist, wenn etwa 3 oder 4 Partialwellen der Drehimpulszerlegung durch die endliche Ladungsverteilung beeinflusst werden⁶⁾.

Die in (1) definierte Größe stellt somit ein brauchbares Maß für die Dichteverteilung dar. In der älteren Literatur war es deshalb üblich, den Kernradius durch

$$R = \left[\frac{5}{32} \int_0^\infty r^2 s^{(1)}(r) r^2 dr \right]^{1/2} \quad (2)$$

zu definieren. R ist der Radius einer rechteckigen Dichteverteilung, die für niedrige Streuenergien gleiche Streuergebnisse liefert wie die tatsächliche Verteilung. Es zeigte sich, daß die in (2) definierte Größe etwa der Beziehung

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (3)$$

$R_0 = \text{const}$

folgt. Neuere Untersuchungen⁷⁾ haben ergeben, daß eine genaue Anpassung von (3) an (2) nicht möglich ist. Der Ausdruck (3) kann jedoch besser angepasst werden, wenn man als Radius diejenige Entfernung vom Kernmittelpunkt ansieht, für den die Dichte auf die Hälfte ihres Wertes im Kernmittelpunkt abgesunken ist. Die Messung derart definierter Kernradien wird durch Streuexperimente schneller Elektronen ermöglicht, weil sie die Wahl mehrerer Parameter für das Modell der Dichteverteilung erlauben.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht von Ergebnissen für den Radius der Ladungsverteilung durch Streuung von Elektronen mit Energien unterhalb 60 MeV. Die Ergebnisse werden durch die Konstante R_0 in (3) ausgedrückt.

Element	Z	E (MeV)	Literatur für Daten	Literatur für Analyse	10^{13} cm
Ag	47	15,7	8)	8)	1,15
Au	79	15,7	8)	8)	1,15
Sn	50	30-45	9)	9)	1,1
W	74	30-45	9)	9)	1,0
Cu	29	15,7	8)	10)	1,0
Ag	47	15,7	8)	10)	1,1
Au	79	15,7	8)	10)	1,2
W	74	31-60	11)	11)	1,18

Während den obigen Messungen noch das Modell einer rechteckigen Dichteverteilung zugrunde lag, haben uns neuere Messungen mit schnellen Elektronen der Energie von 60-200 MeV wesentlich verfeinerte Vorstellungen vom Verlauf der Kernladungsdichte gegeben⁷⁾¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾.

Für die Anpassung des Ladungsdichteverlaufes in der Form

$$\rho^{(r)}(r) = \rho_0 \cdot f_{\gamma}(x) \quad x = \frac{r}{r_1} \quad (4)$$

(ρ_0 = Ladungsdichte im Kernmittelpunkt,
 r_1 : Radiusparameter, γ : Index für verschiedene Funktionstypen)

wurden mehrere Funktionstypen betrachtet. Eine erste analytische Form für $f(x)$ war definiert durch

$$f_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x_1^n e^{-x_1} dx_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1^k}{k!} e^{-x} \quad (5)$$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots$

Diese Funktionen stellen für ganzzahlige Werte von n eine diskrete Folge von Dichteverteilungen dar, die vom exponentiellen bis rechteckigen Verlauf reichen. Weiterhin wurde benutzt

$$f_n^{II}(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-n}} \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-n(1-x)} & x < 1 \\ \frac{1}{2}e^{-n(x-1)} & x \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

und

$$f_{n,s}^{II}(x) = \frac{\sin(sx)}{sx} \cdot f_n^{II}(x) \quad (7)$$

(6) wurde eingeführt, weil (5) für große n (Rechteckform) rechnerisch unbequem zu handhaben ist. (7) dient der Beschreibung eines Dichteverlaufes, der nach den Erwartungen mehrerer Autoren¹⁸⁾¹⁹⁾²⁰⁾²¹⁾ eine größere Ladungsdichte nahe der Kernoberfläche gegenüber der Kernmitte aufweist und für $s \rightarrow 0$ in (6) übergeht.

Die beste Anpassung wurde mit $f_n^{II}(x)$ über große Energiebereiche für Blei und Gold in der Umgebung der Parameterwerte $n=10$, $\bar{R} = 1,00$ gefunden, wobei $\bar{R}$ gleich dem Verhältnis zweier r_1 -Werte aus (4) ist: dem für die Anpassung der radialen Ausdehnung der Dichte an die Streudaten benutzten r_1 -Wert zu dem, der aus den Röntgenspektren von μ -Mesonen-Atomen folgt (§3). Abb. 1 zeigt den gefundenen Verlauf für Au.

Aus der Streuung von Elektronen ergibt sich somit folgendes Bild:

- Außer für die leichtesten Elemente ist die Ladungsdichte im Inneren etwa konstant, auch von Element zu Element.
- An der Oberfläche fällt die Dichte innerhalb einer Zone von etwa $2 \cdot 10^{-13}$ cm ab.
- Ausgedrückt als "Konstante des mittleren quadratischen Radius" nach (3) findet man für die radiale Ausdehnung der Ladungsdichte

$$R_0 = (1,20 \pm 0,01) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (8)$$

Definiert man den Radius der Dichteverteilung von Abb. 1 als diejenige Entfernung vom Kernmittelpunkt, für die die Dichte auf die Hälfte ihres Wertes im Kernmittelpunkt abgefallen ist, so ergibt sich ein "Halbradius" von

$$R = 1,07 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} \text{ cm} \quad (8a)$$

(8) stimmt bis auf 1 % mit dem entsprechenden Wert überein, der sich für die radiale Ausdehnung aus den Röntgenspektren von μ -Mesonen-Atomen ergibt (§3). Es wird vermutet⁽⁶⁾, daß diese geringfügige Differenz in der speziellen Wahl (5), (6) und (7) begründet liegt.

§ 3 : Gebundene μ -Mesonen

Es ist nachgewiesen worden⁽²²⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾, daß μ -Mesonen als Spin 1/2 - Teilchen angesehen werden müssen und daß diese Teilchen an das Nukleonenfeld "schwach" angekoppelt sind, sodaß man analog zu den Elektronen für die hier betrachteten Zwecke von jeder Nicht-Coulomb-Wechselwirkung zwischen μ -Meson und Kern absehen kann. Obwohl das μ -Meson den experimentellen Nachteil hat, nicht in intensiven monoenergetischen Strahlen herstellbar zu sein, sind die Energieniveaus gebundener μ -Mesonen-Zustände mit Erfolg ausgemessen und analysiert worden⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾. Prinzipiell können mit Hilfe der Röntgenspektren von μ -Mesonen-Atomen eine Anzahl elektrischer Eigenschaften der Kerne untersucht werden.⁽²⁸⁾ So hängt beispielsweise die Feinstruktur-Aufspaltung der 2P-Niveaus von der Form der Ladungsverteilung ab⁽²⁷⁾, während die Hyperfeinstruktur zum Quadrupolmoment in Beziehung steht⁽²⁸⁾.

Für die gebundenen 1S-Zustände der μ -Mesonen macht sich die endliche Ausdehnung der Ladungsverteilung stark bemerkbar, da sich das μ -Meson wegen seiner großen Masse im 1S-Zustand zum großen Teil im Kerninneren aufhält.

Andererseits sind die 2P-Zustände viel weniger von der Ausdehnung der Ladungsverteilung abhängig²⁷⁾, sodaß die bis auf 1 % gemessenen²⁶⁾ 2P → 1S Übergänge eine sehr gute Festlegung eines Parameters der Ladungsverteilung erlauben. Diese Übergänge sind deshalb dazu benutzt worden¹³⁾, die Wahl der Parameter aus Elektronenstreuungen einzuschränken, da die gute Übereinstimmung der Radialparameter r_1 in (4) aus Messungen von sowohl π -Mesonen-Röntgenspektren als auch den Streudaten schneller Elektronen die eindeutige Bestimmung von r_1 erlaubt.

Die Analyse der π -Mesonen-Spektren erfolgt durch Lösen des Radialanteils der Dirac-Gleichung für das π -Meson im kugelsymmetrischen Potential angenommener Dichteverteilungen (5), (6), (7). Die folgende Tabelle aus²⁶⁾ gibt eine Übersicht für eine Anzahl von Elementen. Es wurde für die Masse des π -Mesons $210 m_e$ angenommen und das Modell einer rechteckigen Dichteverteilung mit $R=R_0 A^{1/3}$ zugrunde gelegt. Die tabellierten R_0 -Werte ergaben jeweils die beste Anpassung an die gemessenen Übergangsenergieen.

Z	E ($2P_{3/2} \rightarrow 1S$) (MeV)	R_0 (10^{-13} cm)
22	0,955	1,17
29	1,55	1,21
51	3,50	1,22
82	6,02	1,17

Hieraus ergibt sich mit den Definitionen (2) und (8)

$$R = (1,20 \pm 0,03) \cdot A^{1/3} \quad (9)$$

Für leichte Kerne ist eine störungstheoretische Behandlung möglich. Die 1S und $2P_{1/2}$ -Terme werden gegenüber ihren für den punktförmigen Kern geltenden Werten um einen zu $\langle r^2 \rangle$ proportionalen Betrag angehoben mit

$\epsilon \approx \sqrt{1 - \left(\frac{Z}{137}\right)^2}$. Dabei ist die Änderung des $2P_{1/2}$ -Niveaus klein gegen die des $1S_{1/2}$ -Niveaus. Da eine störungstheoretische Behandlung nur für kleine Z möglich ist, wird $\epsilon \approx 1$. Das bedeutet Messung von $\langle r^2 \rangle$ wie bei der Streuung langsamer Elektronen.

Für schwere Kerne muß die Dirac-Gleichung exakt gelöst werden, was einen erheblichen Rechenaufwand bedingt.

§ 4 : Neutronen-Streuung

Im Falle der Neutronen - Streuung handelt es sich um eine Kernkraft-Wechselwirkung zwischen Kern und gestreutem Neutron. Die gemessene Winkelverteilung der Nukleonen wird von elastisch und unelastisch gestreuten Neutronen erzeugt und mißt somit die Eigenschaften eines zweckmäßig gewählten Kernkraftpotential-Modells. Die gefundenen Daten müssen deshalb nicht übereinstimmen mit jenen, die aus den bisher besprochenen Messungen her-rühren.

Am erfolgreichsten in der Beschreibung der Streu-prozesse bei verschiedenen Energien ist hier das optische Modell²⁹⁾³⁰⁾ gewesen. Es beschreibt den Streuprozess mit Hilfe eines komplexen Potentials

$$V_{opt}(r) = V_{os}(r) \left(1 + i g(r) \right) = V_r(r) + i V_i(r) \quad (10)$$

Beste Übereinstimmung mit den Experimenten erhält man³¹⁾ durch das "Saxon-Potential"

$$V_{os}(r) = -B \left(1 + e^{-\beta(r-a)} \right)^{-1} \quad (11)$$

für den Realteil von (10) mit

$$a = R_0 A^{1/3} + r_1 \quad (12)$$

Der Zusammenhang zwischen a und B ist aus Abb. 9b zu
ersehen, wobei die gestrichelte Linie die Steigung des
Potentials im Punkt $r=a$ angibt.

Für die Konstanten ergab sich

$$\begin{aligned} a &= (1,27 A^{1/3} + 0,6) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ \frac{1}{B} &= (0,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ B &= 41 \text{ MeV}, \quad \eta(r) = \text{const} = 0,13 \pm 0,05 \text{ für} \\ &\quad 10 > E_{\text{Str}} > 4 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (13)$$

Eine andere Analyse von 14 MeV - Neutronen ergab
(Culler u. M.)

$$B = 42 \text{ MeV}, \quad a = (1,22 A^{1/3} + 0,74) \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

§ 5 : Protonen - Streuung

Die Protonen-Streuung kann ebenfalls durch das
optische Modell³⁰⁾²⁹⁾ beschrieben werden. Da der Nach-
weis von Protonen im allgemeinen präziser erfolgen kann
als der von Neutronen und außerdem bei der Protonen-
streuung gleichzeitig Coulomb- und Kernkraftstreuung
auftreten, kann hier eine genauere Messung der Einzel-
heiten des verwendeten Potentials erwartet werden. Es
ist deshalb verständlich, daß aus den Streudaten der
Protonen zuerst die Unzulänglichkeit kastenförmiger
Potentiale erkannt wurde, was zu dem verbesserten
Potential der Form (11) führte. Für die (12) und (13)
entsprechenden Daten der Protonen-Streuung ergab sich³¹⁾

$$\begin{aligned} a &= (1,27 A^{1/3} + 0,6) \cdot 10^{-13} \text{ cm} & \frac{1}{B} &= (0,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ B &= 47 \text{ MeV} & \left. \begin{aligned} &\text{für } E_{\text{Str.}} = 17 \text{ MeV} \\ &\eta = 0,18 \end{aligned} \right\} & (14) \\ B &= 36 \text{ MeV} & \left. \begin{aligned} &\text{für } E_{\text{Str.}} = 31 \text{ MeV} \\ &\eta = 0,4 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ergibt sich eine größere Tiefe des Potentials für Protonen als für Neutronen. Beide Potentialtiefen aus (13) und (14) stimmen grob überein mit jener, die man aus dem Fermigas-Modell des Atomkerns³²⁾ erhält.

Kapitel II

Dichteverteilungen aus Einteilchenpotentialen

§ 6 : Zum Schalenmodell

Auf die Frage nach einer mit dem Experiment vereinbarten Kinematik der Nukleonen im Kern hat das Schalenmodell bis heute in der Beschreibung zahlreicher Einzelheiten meist eine befriedigende Antwort gegeben. Versuche zu seiner dynamischen Begründung sind jedoch stets auf erhebliche Schwierigkeiten gestossen. Diese Schwierigkeiten liegen nicht nur in der mathematischen Behandlung des Vielteilchenproblems, sondern auch wesentlich in unserer Unkenntnis über die Natur der Wechselwirkungskräfte zwischen den Nukleonen. Aus diesen Gründen ist es bis heute nicht gelungen, eine exakte Bewegungsgleichung der Nukleonen im Kern aufzustellen und sie näherungsweise oder gar in Strenge zu lösen. Ebenso steht es bislang nicht fest, ob man Einteilchenzustände in der vom Schalenmodell verwendeten Form als kurzlebige, bevorzugte Zustände ansehen muß.

Um nun dennoch zu einer Vorstellung über die Dichteverteilung der Nukleonen im Kern zu gelangen, wird man sich einer phänomenologischen Beschreibungsweise mittels eines geeigneten Kernmodells bedienen. Und hier ist es das Schalenmodell, welches - gerechtfertigt durch

die Erfolge seiner Aussagen auf der Basis von Einteilchenzuständen - eine direkte Berechnung der Dichteverteilungen erlaubt. Im Gegensatz zum rein phänomenologischen Tröpfchenmodell, welches gerade die Dichteverteilung vorgibt, enthält das Schalenmodell in der Annahme je eines Pauschalpotentials von gleicher Weite und unterschiedlicher Tiefe für Protonen und Neutronen bereits eine dynamische Konzeption, die Quantenzustände einzelner Teilchen zur Folge hat.

§ 7 : Das Argument von Johnsen-Teller und eine Untersuchung von Wilets

Die Streuung von schnellen Elektronen (§ 2) an schweren Kernen sowie die Ausmessung der Energieniveaus von μ -Mesonen-Atomen (§ 3) haben gezeigt, daß die Verteilung der Protonen in schweren Kernen einem $R_0 A^{1/3}$ -Gesetz folgt. R_0 hat dabei einen Wert von ungefähr $1,1 \cdot 10^{-13}$ cm. Andererseits folgt ein R_0 von etwa $1,3 \cdot 10^{-13}$ cm aus der Streuung von Neutronen und Protonen mittlerer Energie (§§ 4,5) an schweren Kernen.

Aus der Differenz dieser R_0 -Werte schlossen Johnson und Teller¹⁾, daß die Randzone schwerer Kerne hauptsächlich Neutronen enthält, während die Protonen trotz gegenseitiger elektrostatischer Abstoßung mehr im Inneren angeordnet sein sollten. Ihre Überlegung war, daß sowohl Protonen wie Neutronen in erster Näherung dieselben Kernkraftpotentialtöpfe mit schrägen Wänden vorfinden. Dem Protonenpotential überlagert sich jedoch ein Coulombpotential, welches eine Parallelverschiebung des gesamten Potentialtopfes in Richtung positiver Energien zur Folge hat. Nun sind im Grundzustand Neutronen- und Protonenpotential bei β -stabilen Kernen bis zu einer Grenze von jeweils gleicher Gesamtenergie mit Nukleonen aufgefüllt. Dies aber bedeutet, daß alle Protonen nach jener Vorstellung einen Potentialtopf von kleinerem Radius vorfinden müssen als die

Neutronen. Ein entsprechender Unterschied in den Dichteverteilungen wäre die Folge.

Zu der so angeschnittenen Frage ist eine verbesserte Abschätzung angegeben worden²⁾, ohne die kinetische Energie der Oberfläche zu berücksichtigen. Dabei zeigt sich, daß man für Neutronen und Protonen ein unterschiedliches Kernkraftpotential annehmen muß. Dieser Unterschied rührt her von einer zusätzlichen potentiellen Energie, die sich aus dem Neutronenüberschuß schwerer Kerne ergibt. Diese sogenannte Asymmetrienergie verringert die Tiefe des Neutronenkernkraftpotentials, während sie beim Protonenpotential entgegengesetzt wirkt. Da für die Protonen das Coulombpotential diesen Einfluß überwiegt, bleibt der zuerst beschriebene Effekt dennoch bestehen.

Es sei erwähnt, daß sich die Asymmetrienergie auch von den Zweikörperkräften her verstehen läßt³⁾. Durch den Neutronenüberschuß kann das Proton mit einer größeren Anzahl ungleicher Teilchen in Wechselwirkung treten als das Neutron. Wegen des Pauli-Prinzips können aber ungleiche Nukleonen die kurzreichweitige Wechselwirkung besser ausnutzen als gleichartige.

In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeit von Wilets³⁴⁾ hingewiesen, deren Verfasser einen gegenüber der vorliegenden Arbeit umgekehrten Weg eingeschlagen hat. Ein aus dem Volumenterm der Bethe-v. Weizsäcker-Formel gewonnener und mit Korrekturen für räumlich veränderliche Dichte versehener Ansatz für die Energiedichte $\epsilon(\rho_n, \rho_p)$ liefert einen Ausdruck für die Gesamtenergie, deren Variation nach den Dichten ρ_n und ρ_p auf ein System von Differentialgleichungen führt, die eine Bestimmung des Verlaufes von ρ_n und ρ_p erlauben. Die experimentelle Bindungsenergie im Sinne von (20) tritt hierbei als Lagrange-Parameter auf, während die experimentellen Daten für Kernradius, Oberflächenenergie, Abfallbreite und Asymmetrienergie in den Ansatz für die Energiedichte des Systems eingehen. Es ergibt sich in Übereinstimmung mit

der vorliegenden Arbeit kein Unterschied in der radialen Ausdehnung der Neutronen- und Protonen-Gesamtdichte.

Die Einteilchenpotentiale werden in³⁴⁾ durch das Einteilchenpotential einer effektiven Masse $M \approx 0,6 M$ beschrieben, welches sich aus der Differenz von Gesamtenergie und kinetischer Grenzenergie des "obersten" Teilchens zu

$$V_{\mu}^* = \frac{\partial \epsilon}{\partial g_{\mu}} = 2 (3\pi)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m^2} \cdot g_{\mu}^{2/3}$$

ergibt. Der Index μ kennzeichnet die Nukleonensorte). Die Untersuchung an Kernen mit den Atomgewichten 240, 225, 200, 165 und 160 ergab, daß die radiale Ausdehnung des Potentials etwa $0,7 \cdot 10^{-13}$ cm über die der Dichte hinausreicht.

Eine Analyse von Experimenten über unelastische Streuung³⁵⁾ an schweren Kernen mit Neutronen und Protonen bei Energieen um 150 MeV scheint im Gegensatz zu den Ergebnissen der §§ 4 und 5 die Vermutungen nach¹⁾ und²⁾ zu bestätigen. Danach scheint für Protonen ein größerer Radius wirksam zu sein als für Neutronen. Es wird vermutet, daß für die Protonenstreuung im wesentlichen die Neutronenverteilung wirksam ist, während die Neutronenstreuung stark von der Protonenverteilung abhängt. Als Begründung wird der bei dieser Energie gegenüber der n-n bzw. p-p-Streuung etwa doppelt so große n-p-Streuquerschnitt angegeben.

Im Gegensatz hierzu stehen Untersuchungen³⁶⁾ über die Streuung von 1,4 GeV-Neutronen. Beste Übereinstimmung mit dem Experiment lieferte hier eine Neutronenverteilung, deren radiale Ausdehnung mit den Ergebnissen elektromagnetischer Messungen¹²⁾ übereinstimmt.

§ 8 : Berechnungen an den Kernen $^{128}_{52}\text{Te}$ und $^{176}_{70}\text{Yb}$

Um zu einem ersten Überblick über die Dichteverteilung der Nukleonen im Kern zu gelangen, wurde das Eigenwertproblem für den Radialanteil der Schrödingergleichung gelöst. Es wurden Potentiale mit schrägen Wänden benutzt, wobei die Abfallbreite mit $2 \cdot 10^{-13}$ cm berücksichtigt wurde. Die Abschätzung der Potentiale geschah zunächst für den Kern $^{128}_{52}\text{Te}$, der schon bei verhältnismäßig niedrigem Atomgewicht einen deutlichen Neutronenüberschuß aufweist und mit seinen Nukleonzahlen gleichzeitig in der Nähe abgeschlossener Schalen liegt. So konnte einerseits die Dichte näherungsweise zentralsymmetrisch angenommen werden (verschwindendes Quadrupolmoment für abgeschlossene Schalen!), während andererseits nur wenige Eigenfunktionen benötigt wurden.

Die Bestimmung der Potentialtiefe geschah nach der in § 2 erwähnten Abschätzung²⁾. Im Fall der Protonen wurde jedoch im Einteilchenpotential anstelle des Mittelwertes der Coulombenergie aus der Bethe-v. Weizsäcker-Formel das elektrostatische Potential einer Kugel vom Radius der mittleren Potentialtopfbreite und der Ladung von $Z - 1$ Protonen benutzt. Die Festlegung der Weite geschah versuchsweise nach der Beziehung $R = 1,4 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ cm für die unterste Potentialtopfbreite. Damit ergaben sich die in Abb. 2 gezeigten Potentialformen. Eine Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung erfolgte noch nicht, sodaß der Radialanteil der Schrödingergleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (16)$$

durch die Substitution $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$
in der bekannten Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)}{2mr^2} \right] \chi(r) = E \chi(r) \quad (17)$$

(l: Drehimpulsquantenzahl, m: Nukleonenmasse, E: Gesamtenergie, V(r): Einteilchenpotential) mit den Randbedingungen

$$\chi(r) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0$$

$$\chi(r) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

unter Verwendung der Potentiale nach Abb. 2 zu lösen war. Die Lösung geschah durch "Einschießen" der Eigenwerte. D.h., jeder Eigenwert wurde zunächst versuchsweise auf der Integrieranlage eingestellt und sodann der Verlauf der dazugehörenden Eigenfunktion am Zeichentisch beobachtet. Durch wiederholte Variationen jedes Eigenwertes war derart schrittweise zu erreichen, daß die Randbedingungen von der jeweiligen Eigenfunktion hinreichend erfüllt wurden. Um die durch den Drehimpulsterm in (17) für $r=0$ vorhandene Singularität zu umgehen, wurde (17) für $\ell = 0$ durch den Ansatz

$$\chi(r) = r^{2\ell+1} P(r) \quad (18)$$

die Gestalt

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{2(2\ell+1)}{r} \cdot \frac{dP}{dr} + \frac{E - V(r)}{r^2} = 0 \quad \frac{1}{r^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} \quad (19)$$

gegeben und in dieser Form zur Lösung gebracht. Die jeweiligen Lösungen von (17) sowie die entsprechenden Normierungsintegrale sind im Anhang einzeln aufgeführt. Die Auffüllung jedes einzelnen Energieniveaus erfolgte entsprechend den gequantelten Einstellungsmöglichkeiten der z-Komponente des Drehimpulses im Magnetfeld jeweils mit $2 \cdot (2\ell+1)$ Nukleonen. Dabei zeigte sich, daß die obersten Niveaus der Protonen bzw. Neutronen einen mit der Erfahrung nicht vereinbaren, zu großen und zu unterschiedlichen Absolutwert der Energie hatten (Protonen 11,35 MeV, Neutronen 9,3 MeV). Denn üblicherweise wird in der hier gebrauchten Modellvorstellung die Gesamtenergie des obersten Nukleons als das angesehen, was man experimentell als Bindungsenergie kennt^{x)}. Die Differenz der Bindungsenergien zweier Kerne mit den Atomgewichten A und A+1

$$E(A+1) - E(A) \approx 6 - 8 \text{ MeV} \quad (20)$$

x) Wegen einer Revision dieser Vorstellung durch neuere Untersuchungen: Siehe § 9 und ff.

Die Potentialtöpfe wurden daher ohne Änderung bis zur Erreichung des Kerns ${}^{176}_{70}\text{Yb}$ aufgefüllt. Damit konnte gleichzeitig eine bessere Anpassung der Topfweite an das $A^{1/3}$ -Gesetz erreicht werden, da vorher ein zu großer R_0 -Wert von $1,4 \cdot 10^{-13}$ benutzt wurde, während die auf 70 bzw. 106 Nukleonen aufgefüllten Potentiale einem R_0 -Wert von $1,26 \cdot 10^{-13}$ entsprechen. Für den Kern ${}^{176}_{70}\text{Yb}$ ergaben sich derart nahezu gleiche Gesamtenergien der obersten Nukleonen: Protonen 4,325 MeV, Neutronen 4,85 MeV - wie es wegen der im Grundzustand zu fordernden β -Stabilität sein muß.

Diese nunmehr zu kleinen Werte wurden benutzt, da sie die weitere Verwendung der vorhergehenden Eigenfunktionen des Kerns ${}^{128}_{52}\text{Te}$ erlaubten.

Für den Kern ${}^{176}_{70}\text{Yb}$ werden zu jeder Nukleonensorte gerade abgeschlossene Unterschalen erreicht. Die Normierungsbedingung lautet:

$$\int_0^\infty \chi^2(r) dr = \frac{1}{4\pi} \quad (21)$$

Multipliziert man das zu jedem Eigenwert E_n^1 gehörige Quadrat der Eigenfunktion mit einem Faktor F , der die Normierung sowie Besetzungszahl $2(2l+1)$ des Niveaus E_n^e enthält, so ist die Gesamtdichte $\sum |\chi_v|^2$ für jede Nukleonensorte durch den Ausdruck

$$\sum_{v=1}^N |\chi_v|^2 = \sum_{n=1}^N F_n^e (\chi_n^e(r))^2 \quad \begin{array}{l} M=Z \text{ für Prot.} \\ M=N \text{ für Neutr.} \end{array} \quad (22)$$

gegeben. Dabei ist über n und l bis zum jeweiligen Erreichen der Gesamtnukleonenzahl für Neutronen bzw. Protonen zu summieren.

Abb. 3 zeigt das Termschema. Wie zu erwarten, sieht man, daß die Schalenstruktur nur bei den untersten Niveaus erkennbar wird, da eine Vernachlässigung der Spin-Bahn-Kopplung dort nicht ins Gewicht fällt.

Aus den Eigenfunktionen wurden sodann die reduzierten Nukleonendichten

$$\rho_{\text{Kern.}} = \frac{\sum_{k=1}^{k=2} |\psi_k|^2}{N} \quad \text{und} \quad \bar{\rho}_{\text{Kern.}} = \frac{\sum_{k=1}^{k=2} |\psi_k|^2}{2} \quad (23)$$

bestimmt. Für die reduzierten Dichten pro Kugelschalen-einheit

$$\bar{\rho}_{\text{Kern.}} = 4\pi^2 \rho_{\text{Kern.}} \quad \text{und} \quad \bar{\rho}_{\text{Kern.}} = 4\pi^2 \bar{\rho}_{\text{Kern.}}$$

ergab sich damit der in Abb. 4 angegebene Verlauf.^{x)}

Errechnet man hieraus den mittleren quadratischen Radius für die Protonen- bzw. Neutronenverteilung, so ergibt sich

$$R_{\text{p.}} = \sqrt{\int \bar{\rho}_{\text{p.}}^2 r^2 dr} = 5,48 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (25)$$

$$R_{\text{n.}} = \sqrt{\int \bar{\rho}_{\text{n.}}^2 r^2 dr} = 6,05 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (26)$$

Aus der Differenz findet man

$$\Delta R = R_{\text{n.}} - R_{\text{p.}} = 0,57 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (27)$$

und insbesondere

$$\Delta R_0 = \frac{\Delta R}{\sqrt{2}} = 0,102 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (28)$$

Man erkennt aus (28), daß der gefundene Wert für ΔR_0 in derselben Größenordnung liegt, wie die in § 7 erwähnte Differenz der Messergebnisse für R_0 . Es erhebt sich jedoch die Frage, wie weit eine Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung und der effektiven Masse der Teilchen oder eine bessere Anpassung der verwendeten Potentiale an die neuesten Streudaten^{xx)} das gefundene Ergebnis beeinflussen würden. Daß dieser Einwand berechtigt ist, kann aus der folgenden Betrachtung über den Einfluß der Spin-Bahn-Kopplung entnommen werden.

^{x)} Die Ecken der Kurve stellen die jeweils errechneten Werte dar. Diese Punkte wurden geradlinig verbunden.

^{xx)} Diese Rechnung wurde 1956 durchgeführt.

Dieser Einfluß wird nämlich darin bestehen, durch starke Aufspaltung energiereicher Niveaus die Reihenfolge der Energieterme zu ändern. Der Spin-Bahn-parallelele Anteil vorher nicht besetzter Niveaus wird herabgedrückt und an geeigneten Stellen in der Besetzung bevorzugt werden. Dies wird vor allem gegenüber den Zuständen kleiner Drehimpulse wegen deren geringer Energieaufspaltung geschehen. Da jedoch die Zustände kleinen Drehimpulses im wesentlichen zur Dichte im Kerninneren beitragen, würde dort eine Verkleinerung der Dichte eintreten, während es weiter außen umgekehrt sein sollte. Abb. 5 zeigt ausgedogen den Gesamtdichteverlauf des Kerns $^{176}_{70}\text{Yb}$, während die gestrichelte Kurve qualitativ ohne Berücksichtigung der Normierung den Verlauf zeigt, wie er bei Einbeziehung einer Spin-Bahn-Kopplung nach der obigen Überlegung zu erwarten wäre.

Da der hier geschilderte Effekt wegen des Neutronenüberschusses schwerer Kerne für Neutronen stärker ausgebildet sein sollte als für Protonen, könnte man für den Fall einer gut angepassten Spin-Bahn-Kopplung auf eine Vergrößerung von $A R_0$ in (28) schließen. Auf der anderen Seite ist zu vermuten, daß eine Berücksichtigung der effektiven Masse der Nukleonen gerade die entgegengesetzte Wirkung haben sollte, da der hier untersuchte Oberflächeneffekt offenbar durch die verschiedenen Tiefen der Potentiale für Neutronen und Protonen zustande kommt. Der relative Unterschied in der Potentialtiefe wird aber kleiner mit zunehmender Potentialtiefe, wie es bei Verwendung energieabhängiger Potentiale der Fall wäre. Auf der anderen Seite werden diese tieferen Potentiale im wesentlichen gerade von den Nukleonen kleinen Drehimpulses gespürt, während die für Oberflächeneffekte maßgeblichen Nukleonen höherer Drehimpulse wegen ihrer im allgemeinen höheren kinetischen Energie weniger veränderte Potentiale vorfinden.

§ 9 : Geschwindigkeitsabhängige Potentiale für den Kern $^{197}_{79}\text{Au}$

Der Einteilchennäherung des vorigen Paragraphen lagen rein ortsabhängige Potentiale zugrunde. Wie gezeigt worden ist³⁷⁾, muß man jedoch auch eine Impulsabhängigkeit der Einteilchenpotentiale berücksichtigen. Diese Impulsabhängigkeit kann für Kernmaterie mit $N = Z$ näherungsweise durch einen quadratischen Ansatz

$$V_i = -V_0 + \frac{V_1}{v_F^2} v^2 \quad (29)$$

beschrieben werden³⁸⁾. Die Konstanten V_0 und V_1 lassen sich³⁷⁾ an Kernmaterie abschätzen. Mit einer Volumenenergie von $S = 15$ MeV als Abtrennarbeit und der kinetischen Grenzenenergie $T_F = 34$ MeV findet man $V_0 = 103$ MeV und $V_1 = 1,54 \frac{v_F^2}{2m} = 52,5$ MeV (effektive Masse $m^* = 0,625m$). Die sich hieraus ergebende Energieabhängigkeit nach (29) ist aus $V_{(u)}$ in Abb. 6 zu ersehen. Wie zu erkennen ist, würde ein Anschluß an das optische Potential der Streuprozesse eine Überbestimmung von (29) bedeuten. Es ergibt sich zwar mit den obigen Daten gleichzeitig ein brauchbarer Übergang zu den Daten des § 4. Diese relativ gute Übereinstimmung ist jedoch zufällig, da das optische Potential der wirklichen Kerne im allgemeinen von dem der Kernmaterie abweichen wird (§ 12). Nimmt man für Kernmaterie ein optisches Potential $\phi_{un} = -50$ MeV an, so ist eine Anpassung der Bindungsenergie nicht mehr möglich. Dies bereitet sogar Schwierigkeiten, wenn man auf das optische Potential keine Rücksicht nimmt.

Wie nämlich bemerkt wurde³⁷⁾, ist nur in der strengen Einteilchennäherung der Abstand des obersten Energieniveaus von $V = 0$ als Abtrennarbeit für das energiereichste Nukleon anzusehen. Berücksichtigt man Mehrteilcheneffekte, so wird der Kern nach der Abtrennung in einem angeregten Zustand zurückbleiben mit einer Energie $E_u = E_a - E_g > 0$.

Diese sogenannte Umordnungsenergie wäre also der Abtrennarbeit in obigem Sinn noch hinzuzufügen.

Da bei Beginn der Rechnung keine nachprüfbaren Untersuchungen über den Betrag der Umordnungsenergie vorlagen, ist sie bei der folgenden Berechnung unberücksichtigt geblieben.

Damit wäre lediglich die an Kernmaterie gewonnene Abschätzung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Einteilchenpotentials auf das ortsabhängige Einteilchenpotential des Schalenmodells zu übertragen. Als naheliegende Kombination ergibt sich

$$V(r, \kappa) = \frac{-V_0 + \frac{\kappa^2}{K_0^2} V_1}{1 + e^{\frac{r-a}{R(r-a)}}} \quad (30)$$

Der Ausdruck (30) soll zunächst als Neutronen-Pauschalpotential dienen. Setzt man im Radialanteil der Schrödingergleichung $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$, so lautet die Neutronengleichung

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{V_1/K_0^2}{1 + e^{\frac{r-a}{R(r-a)}}} \right) \frac{d^2 \chi}{dr^2} \\ & + \left\{ - \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-a}{R(r-a)}}} - \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\hbar^2}{m^2} \cdot \frac{\beta V_0 e^{\frac{r-a}{R(r-a)}}}{(1 + e^{\frac{r-a}{R(r-a)}})^2} \left(\frac{e}{-(2+1)} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{V_1}{1 + e^{\frac{r-a}{R(r-a)}}} \right) \cdot \frac{e(2+1)}{r^2} - E \right\} \chi(r) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Die im Anhang einzeln aufgeführten Eigenfunktionen und Eigenwerte der Gleichung (31) wurden wiederum nach dem im § 8 beschriebenen Verfahren unter den Randbedingungen (17) aufgesucht. Aus den Eigenfunktionen ersieht man die radiale Verteilung der verschiedenen Drehimpulszustände. Als Beispiel für die Ermittlung der Eigenwerte sind die zu einem solchen Eigenwert gehörenden "Einschußkurven" abgebildet.

Für die Rechnung wurde $\beta = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}$ gewählt und für den Potentialradius $a = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ ein $R_0 = 1,23 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ zugrunde gelegt. Als Spin-Bahn-Kopplungskonstante wurde in Übereinstimmung mit Bestimmungen von Eigenwerten lokaler Pauschalpotentiale³⁹⁾ der Wert $\lambda = 39,5$ gewählt.

Abb. 7 zeigt die Energieniveaus der Einteilchenzustände. Für das Protonenproblem wurde analog zu den Betrachtungen des § 8 dem Kernkraftpotential (30) das Coulombpotential V_0 einer Kugel der Ladung $Z-1$ überlagert, deren Radius a zur Anpassung an die in den §§ 1,2,3 beschriebenen Messungen durch $a'' = a - 0,1 \text{ \AA}^{1/3}$ gegeben ist. Damit

wird die Protonengleichung:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{V_0/K_F^2}{1+e^{\beta(r-a)}}\right) \frac{d^2\chi}{dr^2} + \left\{ \frac{-V_{op}}{1+e^{\beta(r-a)}} - \frac{\lambda \hbar^2}{4m^2} \right\} \chi(r) = 0 \quad (31a)$$

$$\frac{\beta V_{op} e^{\beta(r-a)}}{r(1+e^{\beta(r-a)})^2} \left(\begin{matrix} e \\ -(e+1) \end{matrix} \right) + \left[\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{V_0}{1+e^{\beta(r-a)}} \right] \frac{e(e+1)}{r^2} + V_c(r) - E \} \chi(r) = 0$$

mit

$$V_c(r) = \begin{cases} \frac{Z-1}{2a^4} e^2 \left[3 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] & \text{für } r \leq a \\ \frac{Z-1}{r} e^2 & \text{für } r \geq a \end{cases}$$

Nachdem die Termfolge der Eigenwerte aus dem Neutronenproblem im wesentlichen festlag, wurde der oberste Eigenwert des Protonenproblems mit dem entsprechenden Eigenwert des Neutronenproblems in Übereinstimmung gebracht (β - Stabilität!) und durch Variation des Potentials $V_{op} = 111,25 \text{ MeV}$ bestimmt. Damit ergibt sich eine Differenzenergie von

$$V_{op} - V_{on} = 111,25 - 103 = 8,25 \text{ MeV} \quad (32)$$

die wegen des erheblichen Rechenaufwandes nicht zur Korrektur von V_{on} benutzt wurde, obwohl dies in erster Näherung eine Verbesserung der Potentialabschätzung bedeutet hätte. Der Betrag von (32) dürfte jedoch wegen der Vernachlässigung der Umordnungsenergie sowieso innerhalb der den verwendeten Potentialen anhaftenden Unsicherheit liegen.

Aus den Eigenfunktionen wurden die reduzierten Nukleonendichten

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^N |\chi_{i,n}|^2}{N} = \frac{|\chi_n|^2}{N} \quad (33) \quad \text{und} \quad S_p = \frac{\sum_{i=1}^P |\chi_{i,p}|^2}{Z} = \frac{|\chi_p|^2}{Z} \quad (34)$$

berechnet.

Für die reduzierten Dichten pro Kugelschaleneinheit

$$\bar{S}_n = 4\pi S_n r^2 \quad (35) \quad \text{und} \quad \bar{S}_p = 4\pi S_p r^2 \quad (36)$$

erhält man den in Abb. 8 angegebenen Verlauf. Berechnet man hieraus den mittleren quadratischen Radius für die Protonen bzw. Neutronenverteilung, so ergibt sich

$$R_p = \sqrt{\int \bar{S}_p^2 dr} = 4,72 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (37)$$

$$R_n = \sqrt{\int \bar{S}_n^2 dr} = 4,90 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (38)$$

und somit

$$\Delta R = R_n - R_p = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$$

$$\Delta R_0 = \frac{\Delta R}{A^{1/2}} = (0,3 \pm 0,01) \cdot 10^{-14} \text{ cm} \quad (39)$$

Der ΔR_0 anhaftende Fehler ergibt sich im wesentlichen durch die graphische Integration von (37) und (38), weil alle Dichten wegen der nichtanalytischen, graphisch durch die Maschine gegebenen Eigenfunktionen von (31), (31a) für diskrete Werte errechnet werden mußten (s. Abb. 4, 5, 8, 9).

Der Unterschied zwischen Potential- und Dichteradius ergibt sich aus $\widetilde{\Delta R} = a - R$. Während der Wert für a durch die verwendeten Potentiale (30) festliegt, muß der Halbradius R (siehe Text zu (8a)) der Gesamtdichtevertellung aus Abb. 9a entnommen werden. Da das Schalenmodell

keine konstante Dichte im Kerninneren liefert, ist dies nur mit beschränkter Genauigkeit möglich. Nimmt man für die Dichte im Kerninneren aus Abb. 9a einen Wert von $1,46 \cdot 10^{38}$ Nukl. cm^{-3} an, so findet man $R = 6,65 \cdot 10^{-13}$ cm. Damit reicht der Potentialradius um

$$\widetilde{\Delta R} \approx 0,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (40)$$

über den Radius der Gesamtdichteverteilung hinaus.

Hieraus folgt

$$\widetilde{\Delta R}_0 = \frac{\Delta R}{A^{1/3}} \approx 0,1 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (41)$$

Kapitel III

Diskussion der Ergebnisse

§ 10 : Dichteverteilungen und Eigenwerte

Die Ergebnisse des vorangegangenen Paragraphen zeigen mit den Gleichungen (37), (38) und (39), daß nach dem Schalenmodell keine Anhäufung von Neutronen am Kernrand erwartet werden darf.

Während eine erste Abschätzung in § 8 mit (28) einen ΔR_0 -Wert von der Größenordnung der in den §§ 1 - 5 und 7 auftretenden Differenzen der Messergebnisse anzudeuten schien, hat eine genauere Untersuchung des § 9 in (39) einen wesentlich kleineren ΔR_0 -Wert ergeben. Daraus ist zu ersehen, daß die in § 8 vermutete Verkleinerung von ΔR_0 durch die für alle Nukleonen tieferen energieabhängigen Potentiale die (§ 8) erwartete Vergrößerung von ΔR_0 durch Einbeziehung der Spin-Bahn-Kopplung überwiegt. Und zwar ist dies der Fall, obwohl die Randzone im wesentlichen von höheren Drehimpulszuständen besetzt ist, deren Nukleonen gerade die geringsten Potentialänderungen durch Berücksichtigung der Geschwindigkeitsabhängigkeit ihrer Einteilchenpotentiale erfahren, andererseits aber höhere

Besetzungszahlen aufweisen.

Wie man aus den Abb. 8 und 9 sieht, liegt der in (39) gefundene ΔR_0 -Wert an der Grenze dessen, was im Rahmen des verwendeten Kernmodelles als eine deutliche Aussage angesehen werden darf, womit sich die gleiche radiale Verteilung für Protonen und Neutronen ergibt. Dabei ist zu beachten, daß durch a" in (31a) der sich nach Kapitel I ergebende Unterschied der radialen Verteilung zwischen Ladungsdichte und Kernkraftpotential berücksichtigt wurde. Nimmt man an, daß die hier erhaltenen Ergebnisse die Wirklichkeit richtig beschreiben, so sollte die dem Gedanken von § 7 zugrunde liegende Differenz von $0,2 \cdot 10^{-13}$ cm nur in der Messmethode (Coulombkraftmessung, Kernkraftmessung) begründet liegen und keine Schlüsse auf die tatsächliche Verteilung zulassen. Wie man sieht, wird diese Differenz durch (41) etwa zur Hälfte erklärt, in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von³⁴⁾. Daß der in³⁴⁾ angegebene Wert von $\tilde{\Delta R} = 0,7 \cdot 10^{-13}$ cm in (40) nicht erreicht wird, dürfte vor allem die folgenden Gründe haben:

- 1) Wie in § 11 gezeigt werden wird, hat die Berücksichtigung der Umordnungsenergie tiefere Potentiale für die Nukleonen von hoher kinetischer Energie zur Folge (Abb. 6). Da die Dichte am Kernrad - wie aus den im Anhang aufgeführten Eigenfunktionen ersichtlich - wegen der höheren Drehimpulse im wesentlichen gerade von diesen Nukleonen erzeugt wird, wäre somit durch Verkleinerung von R eine Zunahme von $\tilde{\Delta R}$ zu erwarten.
- 2) im Gegensatz zu³⁴⁾ ist das in der vorliegenden Arbeit benutzte Verfahren nicht selbstkonsistent.

Der Unterschied von (40) zu dem entsprechenden Wert von $0,7 \cdot 10^{-13}$ nach³⁴⁾ kann als ein Maß für die Güte der Annäherung an den Fall der Selbstkonsistenz angesehen werden. Nach 1.) ist durch Verwendung von Potentialen nach § 11 noch eine Verbesserung zu erwarten.

Wie man aus Abb. 9 sieht, gehen die Kurven für χ^2 und $\chi^2_{\sim}$ unterhalb von $r=0,5 \cdot 10^{-13}$ cm in jeweils zwei gestrichelte Linien über. Damit soll die der Berechnung unterhalb dieses r -Wertes anhaftende Unsicherheit gezeigt werden, die in der auch auf die Gleichungen (31), 31a) angewandten Transformation (18) begründet ist. Die Lösungen der transformierten Differentialgleichung (31) haben für höhere Drehimpulse und $0 < r < 0,5 \cdot 10^{-13}$ so kleine Werte, daß eine genaue Ablesung der Ordinate an den von der Maschine graphisch gelieferten Kurven nicht mehr möglich war.

Der aus den Messungen der §§ 2 und 3 ermittelte Wert von $1,72 \cdot 10^{38}$ Nukleonen/cm³ für die Dichte im Kerninneren wird nicht ganz erreicht.

Die in Abb. 7 dargestellten Eigenwertspektren stimmen in ihrer Reihenfolge gut überein mit den halbempirischen Termschemata, wie sie nach dem Schalenmodell zu erwarten sind⁴⁰⁾. Eine Schalenstruktur für die "magischen Zahlen" ist bei jeder Nukleonensorte deutlich ausgeprägt. Abweichungen in der Termfolge gegenüber dem Experiment⁴⁰⁾ treten für die Protonenniveaus an folgenden Stellen auf: Die Lage der Terme $1d\ 3/2$ und $2s\ 1/2$ sollte nach⁴⁰⁾ umgekehrt sein, ebenso die der Terme $1f_{5/2}$ und $2p_{3/2}$. Die Niveaus $1g_{7/2}$ und $2d_{5/2}$ fallen hier innerhalb der Rechengenauigkeit zusammen, während man experimentell den Zustand $1g_{7/2}$ etwas tiefer erwartet.

Die Neutronenniveaus werden in den oberen Termen weniger gut wiedergegeben. Außer den obigen Abweichungen, die auch für Neutronen auftreten, sollte die Reihenfolge oberhalb der 50er-Schale lauten: $2d_{5/2}$, $1g_{7/2}$, $1h_{11/2}$, $3s_{1/2}$, $2d_{3/2}$, $2f_{7/2}$, $1h_{9/2}$, $3p_{5/2}$, $3p_{3/2}$, $1i_{13/2}$. Demgegenüber liefert die Rechnung: $2d_{5/2}$ und $1g_{7/2}$ fallen zusammen, $1h_{11/2}$, $3s_{1/2}$, $2d_{3/2}$, $2f_{7/2}$, $1i_{13/2}$, $1h_{9/2}$, $3p_{3/2}$. Der Zustand $2f_{5/2}$ liegt oberhalb von $3p_{3/2}$ und wird nicht mehr besetzt, da mit der vorstehenden Reihenfolge nach Ab-

schluß der Unterschale $3p_{3/2}$ gerade 118 Nukleonen, d.h. die volle Neutronenzahl erreicht wird. Hätte der Zustand $2f_{5/2}$ erwartungsgemäß zwischen $1h_{9/2}$ und $3p_{3/2}$ gelegen, wäre das mit 14 Nukleonen besetzte Niveau $1i_{13/2}$ nurmehr mit 8 Nukleonen aufzufüllen gewesen, einer weiteren Verkleinerung von ΔR_0 entsprechend. Die relativ hoch besetzte Unterschale $1i_{13/2}$ wäre hierbei jedoch nicht mehr abgeschlossen gewesen.

Die Abweichung der obersten Neutronenniveaus scheint zu zeigen, daß das Potential für hohe kinetische Energien zu weit auseinanderläuft. Im Fall des Protonenpotentials hat dieser Effekt wenig Einfluß auf die Nukleonen, da sie wegen der überlagerten Coulombenergie tiefer in ihrem Potentialtopf liegen.

Man kann auch hier erwarten, daß die Berücksichtigung der Umordnungsenergie eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment zur Folge hat, da die energiereichen Nukleonen dann tiefere Potentiale vorfinden und ihre Niveaus somit vom Bereich des stärker auseinanderlaufenden Potentials weiter entfernt sind (§ 11).

Im Fall des Termmpaares $2p_{3/2} - 1f_{5/2}$ läßt sich der Einfluß einer Spin-Paarungsenergie erkennen, da das vierte und letzte Nukleon der $2p_{3/2}$ -Unterschale für Protonen erst eingebaut wird, wenn die $1f_{5/2}$ -Unterschale bereits mit 5 ($^{85}_{37}\text{Rb}$) bzw. 6 ($^{89}_{39}\text{Y}$) Nukleonen besetzt ist. Im letzteren Fall befindet sich bereits ein Teilchen im Zustand $2p_{1/2}$.

§ 11 : Kritik der Potentiale

Nach Durchführung der in den beiden vorangegangenen Paragraphen beschriebenen Untersuchung erschien als Preprint eine Arbeit⁴¹⁾, deren Verfasser mittels einer phänomenologischen Theorie durch Einbeziehung der Umordnungsenergie (§9) zu verbesserten Abschätzungen geschwindig-

keitsabhängiger Einteilchenpotentiale für beide Nukleonsorten in wirklichen Kernen gelangt.

Es wird angenommen⁴¹⁾, daß die Abtrennarbeit S in Kernmaterie durch

$$S = -T_F - V_0 - V_1 - E_u^{KM} \quad (42)$$

exakt erfaßt wird, wobei T_F die kinetische Grenzenenergie, V_0 und V_1 die Konstanten aus (29), E_u^{KM} die Umordnungsenergie für Kernmaterie bedeuten. Das mittlere Potential für ein Nukleon wird durch einen quadratischen Ansatz

$$V(u_i) = \frac{1}{\Omega} \sum_j (\lambda_0 + \lambda_1 (R_i - R_j)) \quad (43)$$

dargestellt (Ω : Normierungsvolumen). Aus den Annahmen (42) und 43) läßt sich $E_u^{KM} = E_u^{KM}(\lambda_0, \lambda_1)$ bestimmen. Für wirkliche Kerne werden für Protonen und Neutronen zwei spezielle Ansätze der Form (43) verwendet, und die erhaltenen Potentiale nach dem Neutronenüberschuß q entwickelt. Unter Benutzung der experimentellen optischen Potentiale und durch Vergleich mit den Koeffizienten der Bethe-v. Weizsäcker-Formel gelangt man zu den in Abb. 6 dargestellten Verhältnissen. Die unterstrichenen Größen ergeben sich aus⁴¹⁾. Wendet man die Theorie von⁴¹⁾ insbesondere auf den in den §§ 9 und 10 betrachteten Kern $^{197}_{79}\text{Au}$ an, so findet man die Potentiale $\underline{V}^P(q)$ und $\underline{V}^N(q)$ in Abb. 6. Die Indices S^{KM} , N , P stehen für Kernmaterie, Neutronen, Protonen. $\underline{V}^P(q)$ bedeutet das Protonen-Kernkraftpotential eines wirklichen Kernels mit dem Neutronenüberschuß q . $\underline{V}^N(q)$ gilt entsprechend für das Neutronenpotential. $\underline{E}_u^{KM}$ entspricht E_u^{KM} in (40), während ϕ^{KM} das optische Potential für Kernmaterie bedeutet.

Wie man sieht, verlaufen die Potentiale nach⁴¹⁾ flacher, als sie in der vorliegenden Arbeit benutzt wurden. Die Asymmetrieenergie ist nach⁴¹⁾ für alle Teilchen gleich (paralleler Verlauf der Potentiale), während sie hier mit der kinetischen Energie etwas abnimmt, größenordnungsmäßig aber mit⁴¹⁾ gut übereinstimmt. Dies ist besonders für die energiereichen Teilchen der Fall, d.h. im wesentlichen für die Nukleonen mit höherem Drehimpuls. Wie man nun aus den

im Anhang aufgeführten Eigenfunktionen sieht, wird die Dichte am Kernrand gerade von diesen Zuständen bestimmt. Aus den am Schluß von § 8 angeführten Gründen ist daher ersichtlich, daß für die Dichteverteilung am Ergebnis (39) nichts geändert wird. Allenfalls wäre eine weitere Verkleinerung von ΔR in (39) zu erwarten, da die Nukleonen der Randzone nach ²¹⁾(Abb. 6) tiefere Potentiale und damit einen kleineren relativen Kernkraftpotential-Unterschied vorfinden. Der zu erwartende Einfluß auf die Ergebnisse (40), (41) wurde bereits in § 10 besprochen. Es ist offensichtlich, daß die Verwendung von Potentialen nach ⁴¹⁾ den Betrag der Eigenwerte von Abb. 7 ändern würde. Aus dem monotonen, linearen Verlauf der potentialen Energie mit der kinetischen Energie der Nukleonen sieht man indessen, daß eine Änderung der Strukturen und Termfolgen für die ermittelten Niveaus in Abb. 7 nur für die obersten Neutronenniveaus aus den in § 10 erwähnten Gründen zu erwarten wäre.

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Frage nach einem relativen Unterschied in der radialen Verteilung von Protonen und Neutronen in schweren Kernen wird zuerst über die experimentellen Tatsachen berichtet. Es wird versucht, hierzu mit Hilfe des Schalenmodells zunächst eine qualitative Aussage zu machen. Diese Aussage ist nicht möglich, da sich entgegengesetzt wirkende Einflüsse auf die Nukleonen ergeben, die sowohl für, als auch gegen einen Unterschied in der radialen Verteilung beider Nukleonensorten sprechen würden. Aus diesem Grund wird eine vollständige Berechnung des Kernes ¹⁹⁷₇₉Au nach dem Schalenmodell unter Verwendung energieabhängiger Einteilchenpotentiale durchgeführt, wobei die Energieabhängigkeit an Kernmaterie abgeschätzt wird. Es ergibt sich im Rahmen der zugrunde liegenden Modellvor-

stellung kein merklicher Unterschied in der radialen Verteilung der Nukleonen. Die ermittelten Energieterme stimmen in Struktur und Reihenfolge gut mit dem Experiment überein. Der Vergleich mit neuesten Untersuchungen über die Einzelteilchenpotentiale wirklicher Kerne zeigt, daß keine wesentliche Änderung der erzielten Resultate zu erwarten ist. Der gefundene Unterschied von Potential- und Dichteradius stimmt größenordnungsmäßig überein mit den durch ein selbstkonsistentes Variationsverfahren gewonnenen Ergebnissen anderer Autoren und erklärt etwa zur Hälfte die experimentelle Differenz bei der Bestimmung des Kernradius aus Coulomb- und Kernkraftstreuung.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1956 bis 1958 am Institut für theoretische Physik der Universität München.

Herrn Prof. Dr. F. B o p p , sowie

Herrn Dr. F. Beck und Herrn Dr. K. Wildermuth möchte ich für die Anregung zu dieser Untersuchung sowie zahlreiche fördernde Diskussionen herzlich danken.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Direktor Dr. A. Siemens, Herrn Obergeringenieur H. Hoffmann und Herrn Dipl.math. Kett von den Siemens-Schuckertwerken AG in Erlangen für die großzügige Überlassung der Integrieranlage und ihre unermüdliche Unterstützung bei der Durchführung der umfangreichen Rechnungen, ohne die eine Fertigstellung der vorliegenden Arbeit unmöglich gewesen wäre.

LITERATUR

- 1) M.H. Johnson, E. Teller, Phys. Rev. 93 (1954) S. 537
- 2) K. Wildermuth, Z. f. Naturf. 9a (1954) S. 1047
- 3) P. Mittelstaedt, Z. f. Naturf. 10a (1955) S. 379
- 4) W. Wild, Bayerische Akad. Wiss., Math.-Naturw.-Klasse 18 (1956) S. 371
- 5) H. Feshbach, Phys. Rev. 84 (1951) S. 1206
- 6) K.W. Ford, D.L. Hill, Ann. Rev. of Nucl. Sc. Vol. 5, Stanford, Annual Rev. Inc. 1955
- 7) B. Hahn, D.G. Ravenhall, R. Hofstadter, Phys. Rev. 101 (1956) S. 1131
- 8) E. Lyman, A. Hanson, M. Scott Phys. Rev. 84 (1951) S. 626
- 9) C. Hammer, E. Raka, R. Pidd, Phys. Rev. 90 (1953) S. 341
- 10) F. Bitter, H. Feshbach, Phys. Rev. 92 (1953) S. 837
- 11) R.W. Pidd, C.L. Hammer, Phys. Rev. 99 (1955) S. 1396
- 12) R. Hofstadter, B. Hahn, A.W. Kundsén, Mc Intyre, Phys. Rev. 95 (1954) S. 512
- R. Hofstadter, H.R. Fechter, A.W. Kundsén, Mc Intyre, PR 92/1953 S. 978
- 13) K.W. Ford, D.L. Hill, B.E. Freemann Fast electron scattering
Determination of radial charge
distribution in heavy nuclei,
Phys. Rev. 1957
- 14) L.I. Schiff, Phys. Rev. 92 (1953) S. 988
- 15) D.G. Ravenhall, D.R. Yennie, Phys. Rev. 95 (1954) S. 239
- 16) D.R. Yennie, D.G. Ravenhall, R.N. Wilson, Phys. Rev. 95 (1954) S. 500
- 17) S. Brenner, G.E. Brown, L.R.B. Elton Phil. Mag. 45/1954 S. 524

- 18) E. Wigner, Bicentennial Symposium, Univ. of Pennsylvania 1940
- 19) E. Feenberg, Phys. Rev. 59 (1941) S. 149 u. S. 593 sowie Rev. Mod. Phys. 19 (1947) S. 239
- 20) W.J. Swiatecki, Proc. Phys. Soc. London A 63, S. 1208, 1950
- 21) S. Flügge, W. Zickendrath Zeitschr. für Physik 1 (1955) S. 143
- 22) E. Amaldi, G. Fidicaro, Phys. Rev. 81 (1951) S. 339
- 23) J.H. Kennedy, Phys. Rev. 87 (1952) S. 953
- 24) E. Ferrari, C. Villi, Phys. Rev. 96 (1954) S. 1159
- 25) L.N. Cooper, E.M. Henley, Phys. Rev. 92 (1953) S. 801
- 26) V.L. Fitch, J. Rainwater, Phys. Rev. 94 (1953) S. 789
- 27) D.L. Hill, K.W. Ford, Phys. Rev. 94 (1954) S. 1617
- 28) J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 21 (1949) S. 13
J.A. Wheeler, Phys. Rev. 92 (1953) S. 312
- 29) H. Feshbach, C. Porter, V.F. Weisskopf Phys. Rev. 90 (1953) S. 166, Phys. Rev. 96 (1954) S. 448
- 30) F.M. Medina, G. Süssmann, Fortschr. d. Physik 4 (1956) S. 297
- 31) V.F. Weisskopf, Proc. of the Int. Conference on Nuclear Reactions Amsterdam 1956, S. 952
G. Culler, S. Fernbach, N. Shermann, Phys. Rev. 101 (1956) S. 1047
- 32) W. Heisenberg, W. Macke, Theorie des Atomkerns, Göttingen 1952, Druck der Max-Planck Gesellschaft.
- 33) K. Wildermuth, Fortschritte der Physik 10, 1957
- 34) R.A. Berg, L. Wilets, Phys. Rev. 101 (1956) S. 201
L. Wilets, Phys. Rev. 101 (1956) S. 1805
- 35) R.G.P. Voss, R. Wilson Phys. Rev. 99 (1955) S. 1148

- 36) R.W. Williams, Phys. Rev. 98 (1955) S. 1148
- 37) V.F. Weisskopf, Nucl. Phys. 3 (1957) S. 423.
Unabhängig davon gelangte
F. Beck zu ähnlichen Resultaten (persönliche Mitteilung)
- 38) H.A. Bethe, Phys. Rev. 103 (1956) S. 1353
- 39) A.A. Ross, H. Mark, Phys. Rev. 102 (1956) S. 1613
R.D. Lawson,
- 40) P.F.A. Klinkenberg, Rev. Mod. Phys. 24/2 (1952)
S. 63
- 41) P. Mittelstaedt Zur phänomenologischen Theorie der Kernmaterie. Preprint
4918, CERN, Genf 1958

$\delta^{(e)}$ [Coul. cm⁻³]

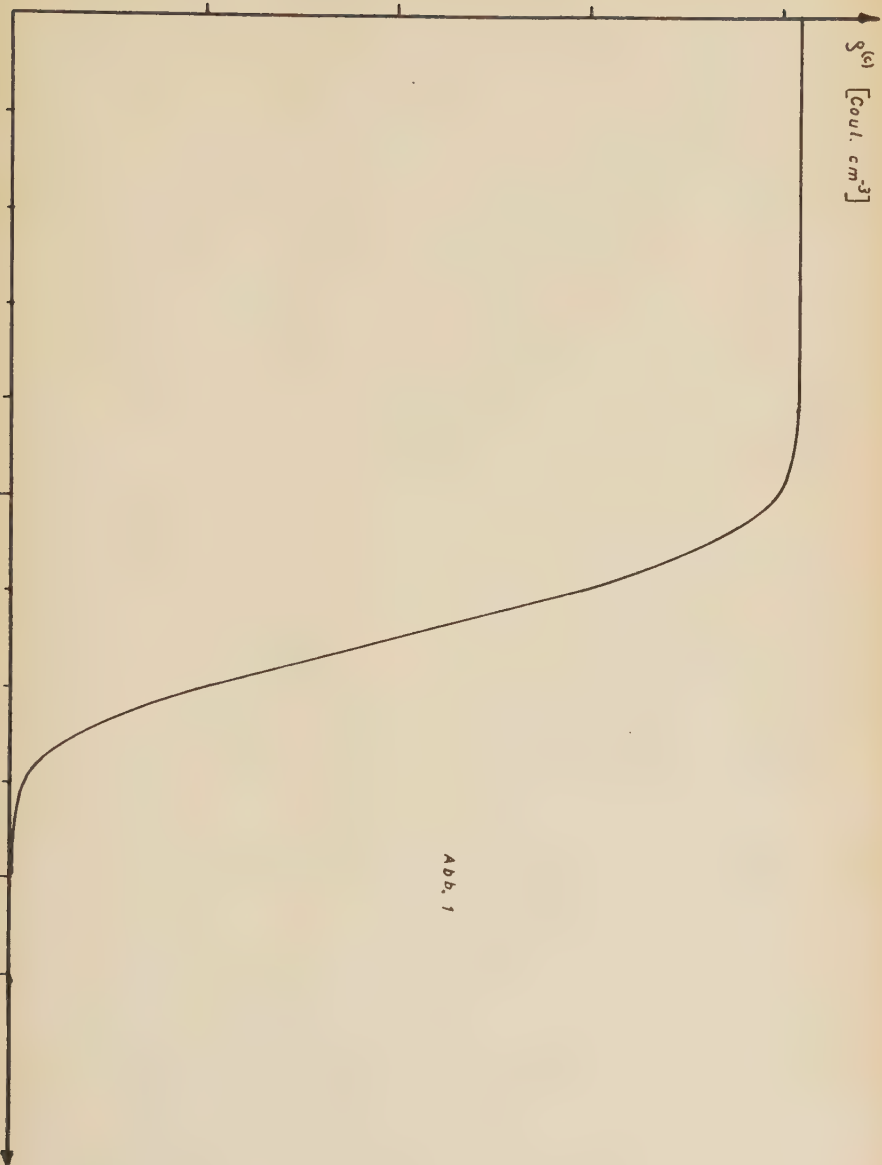
1,00

0,75

0,50

0,25

Abb. 1



MeV

E_i^L :

L: DREHMIMPULS

i: NUMMERIERUNG ZU L

NEUTRONEN

PROTONEN

0

0

0

0

_____ E_2^3

_____ E_1^5
 _____ E_1^3
 _____ E_0^3
 _____ E_2^2

_____ E_1^4

_____ E_2^1

_____ E_1^3

_____ E_2^0
 _____ E_2^2
 _____ E_1^4

_____ E_1^1

_____ E_1^0

_____ E_1^0

_____ E_2^2

_____ E_1^4

_____ E_2^1

_____ E_1^3

_____ E_2^0

_____ E_1^2

_____ E_1^1

_____ E_1^0

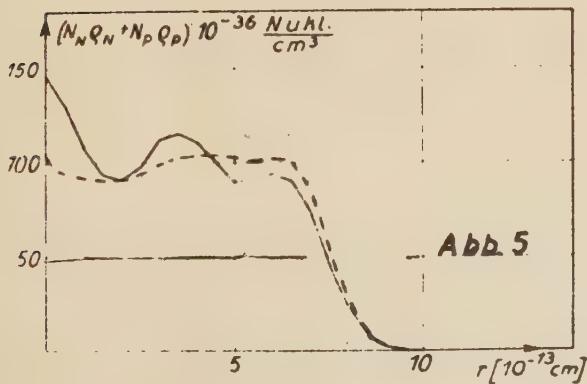
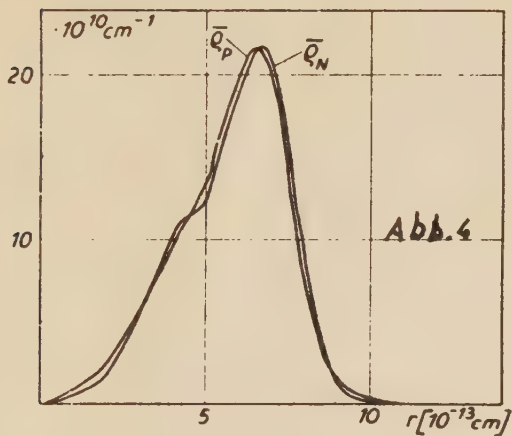
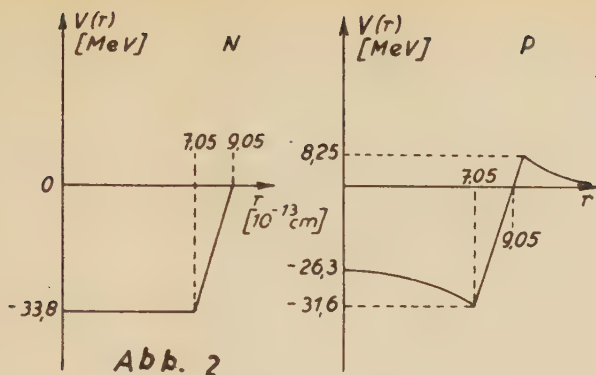
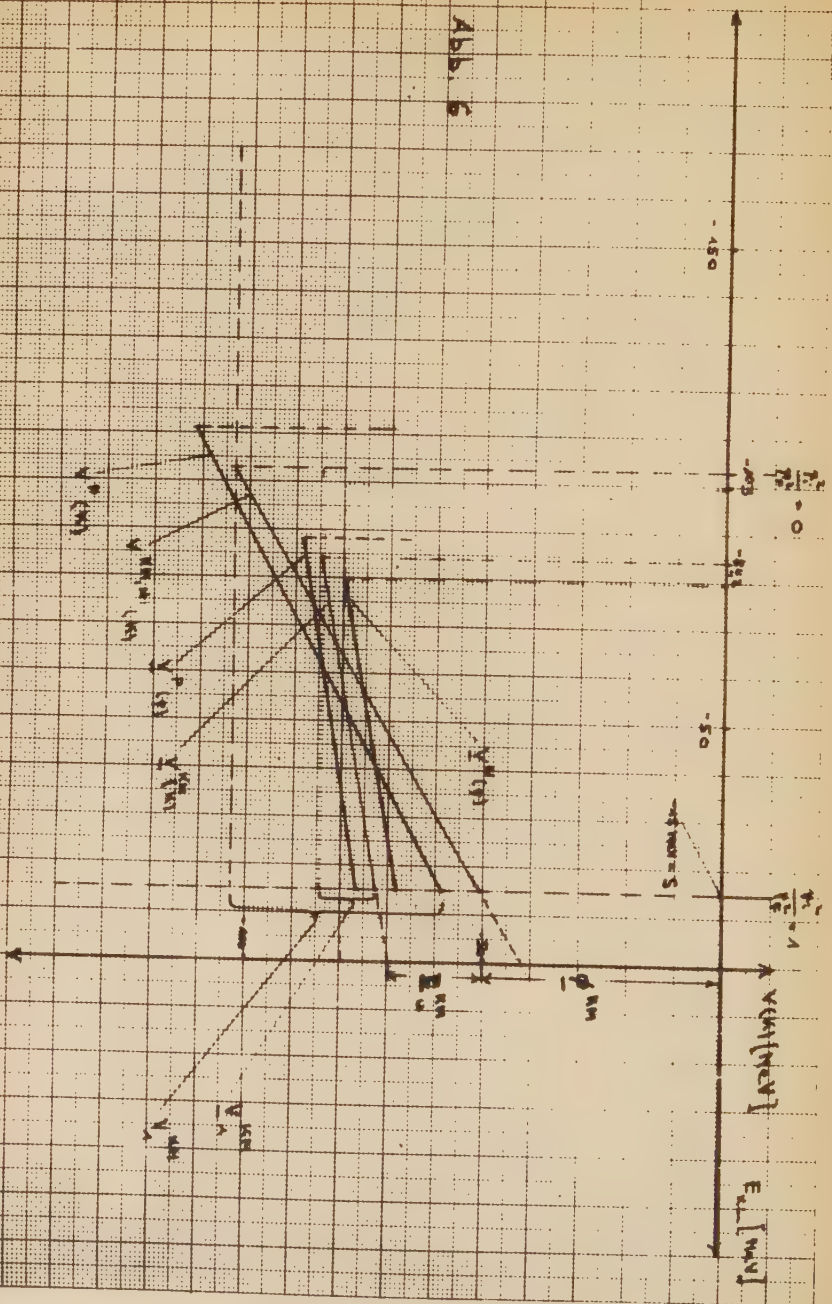


Abb. 6



$^{197}_{79}\text{Au}$

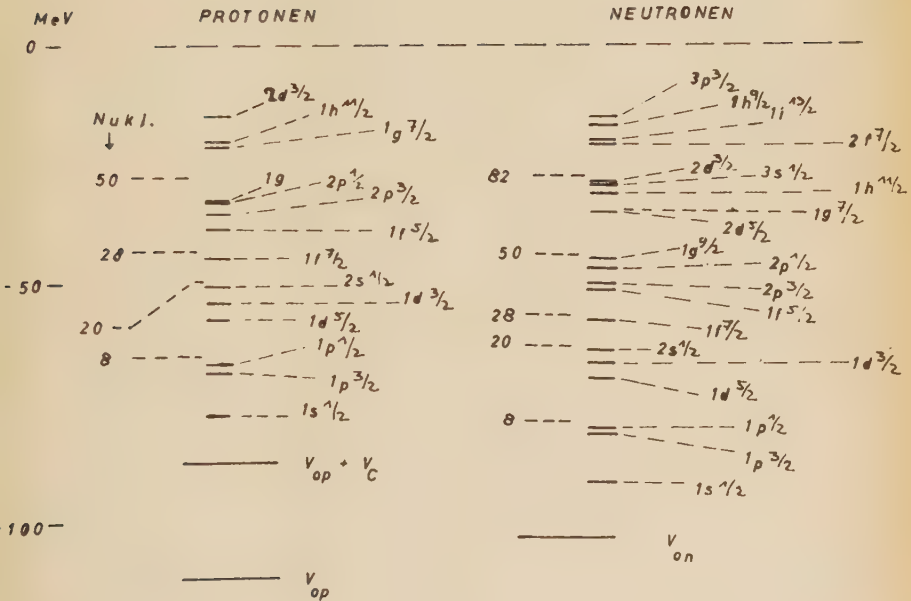
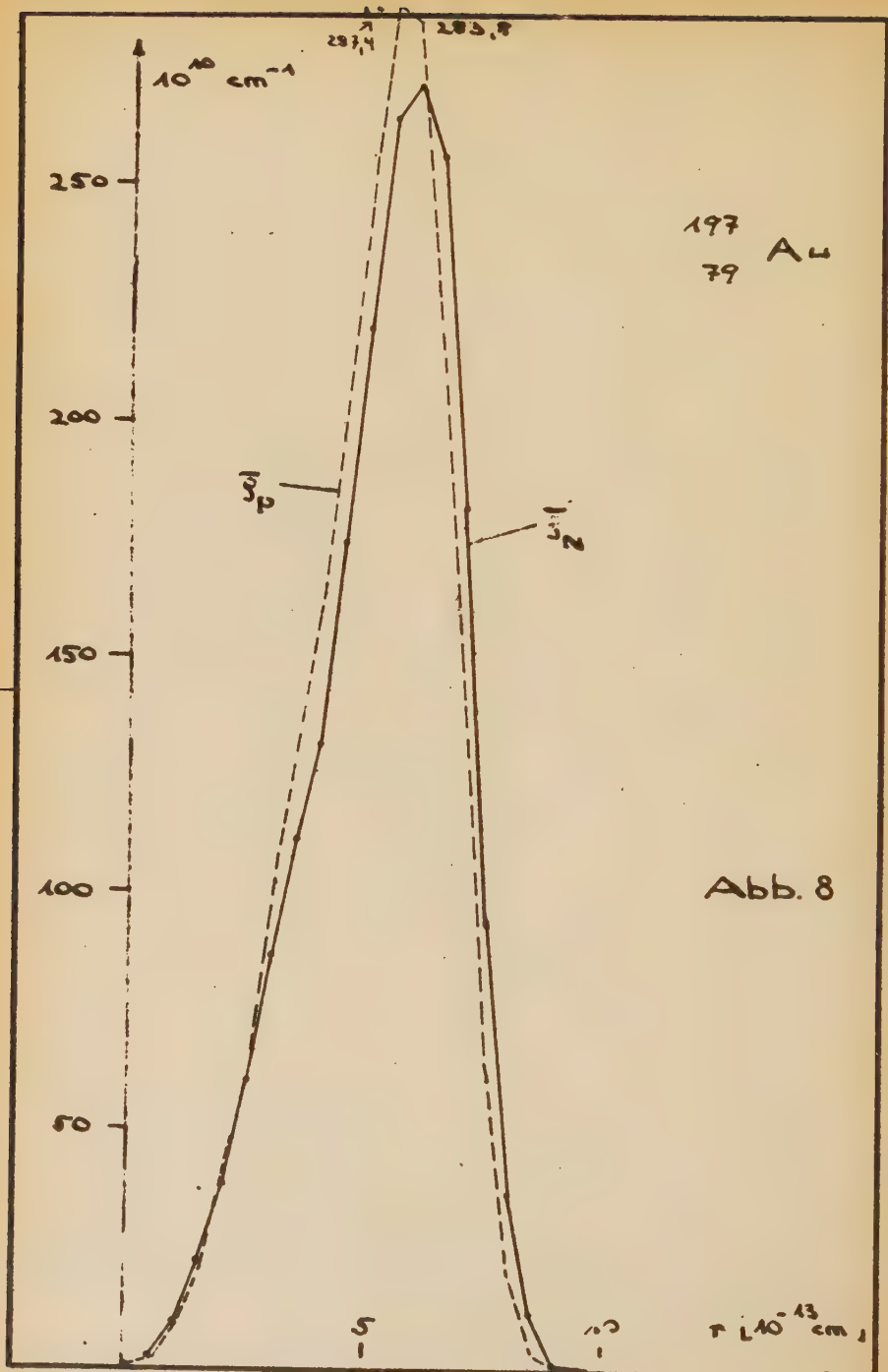


Abb. 7



$10^{38} \text{ NUCL. cm}^{-3}$

$\psi_2, \psi_2' + \psi_2''$

ψ_2'

ψ_2''



197 Au
79

$\lambda V(r)$

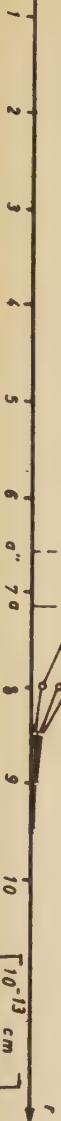
$\frac{1}{z} \frac{4}{n}$

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-a}{\lambda}}}$$

↑ Abd. 9b

← Abd. 9a

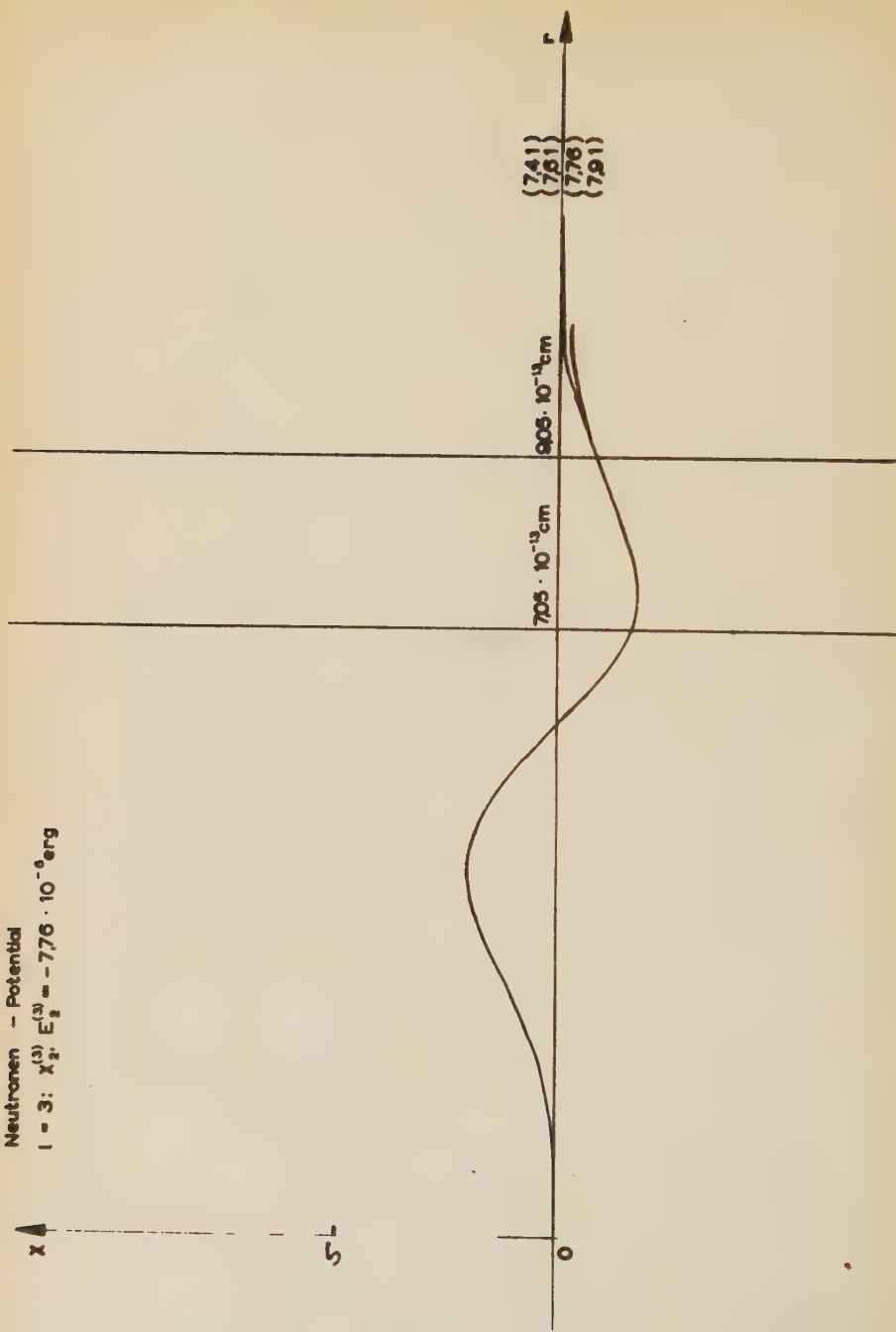
r
[10^{-13} cm]



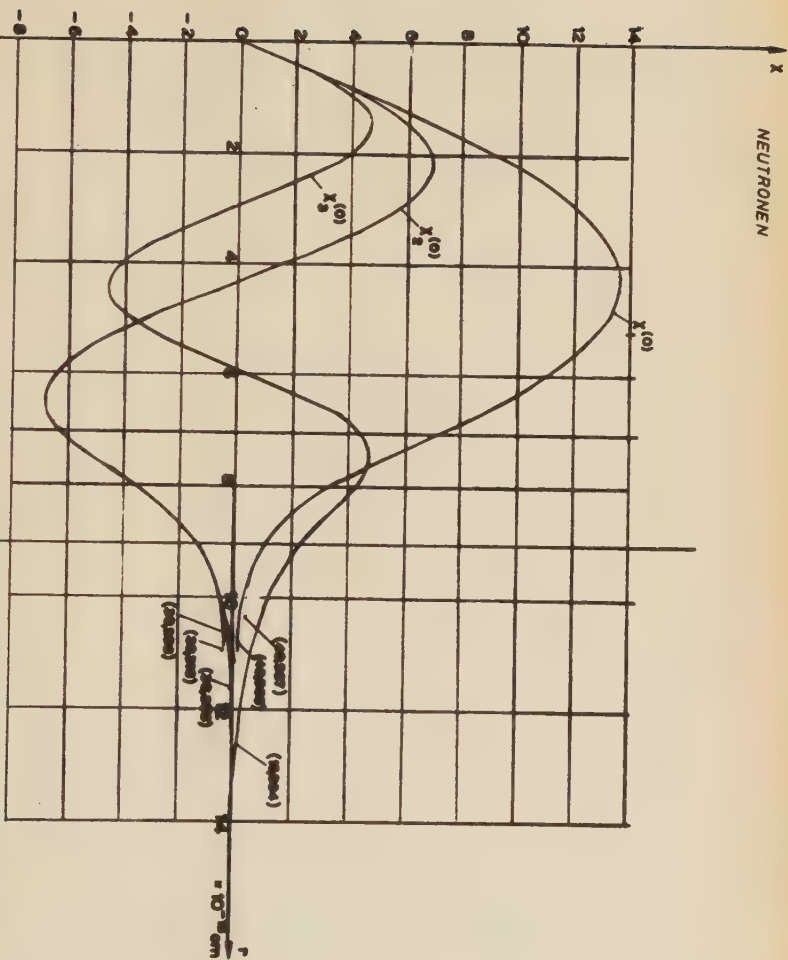
Anhang

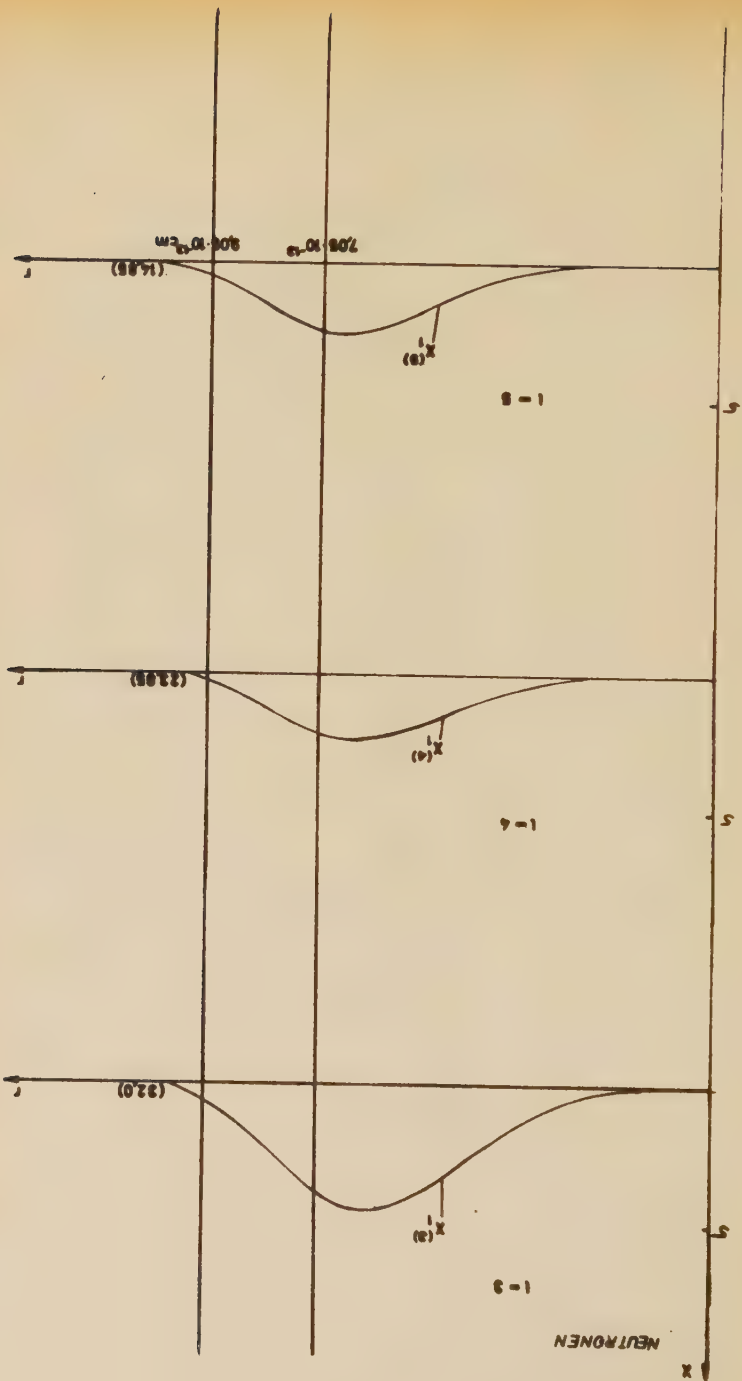
Eigenfunktionen zu § 8

Neutronen - Potential
 $l = 3: \chi_2^{(3)} E_2^{(3)} = -776 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$



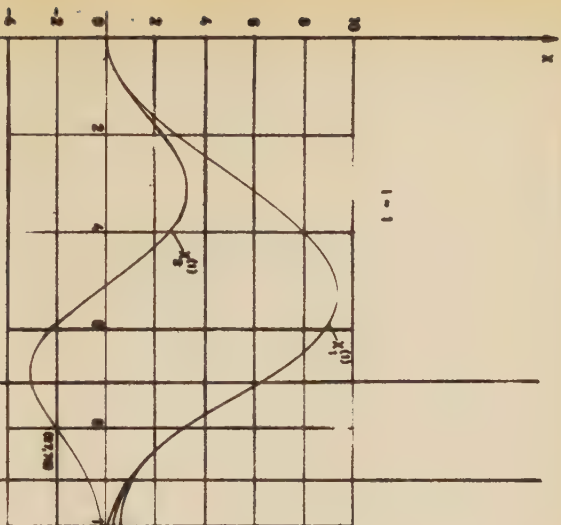
NEUTRONEN



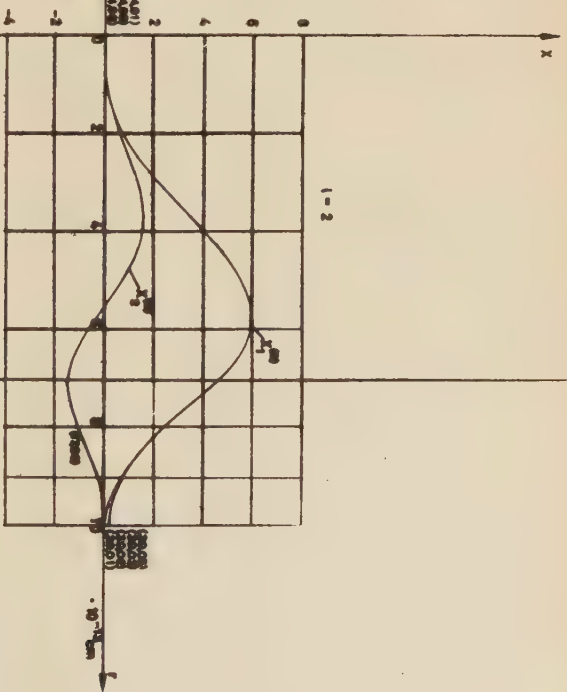


NEUTRONEN

$l = 1$

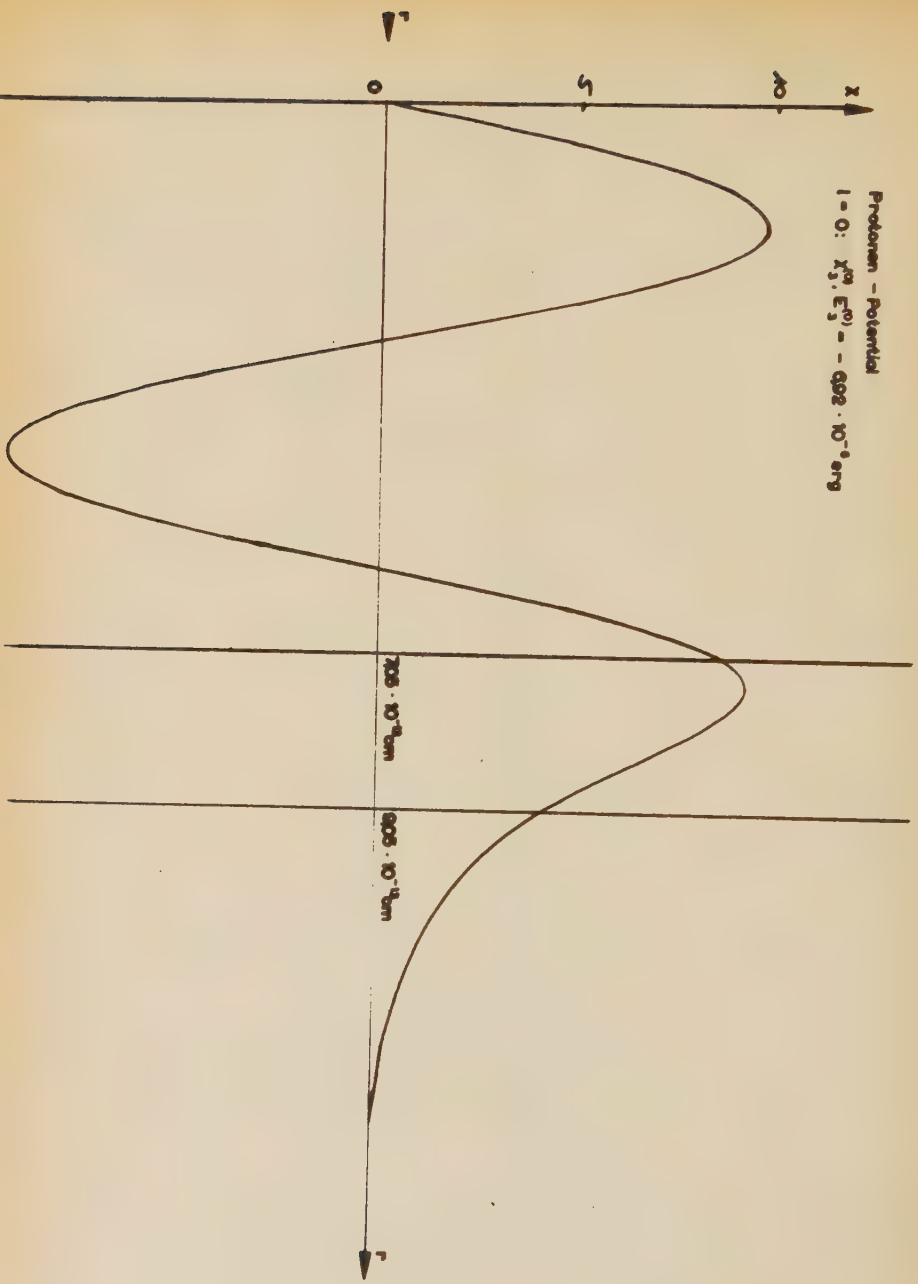


$l = 2$

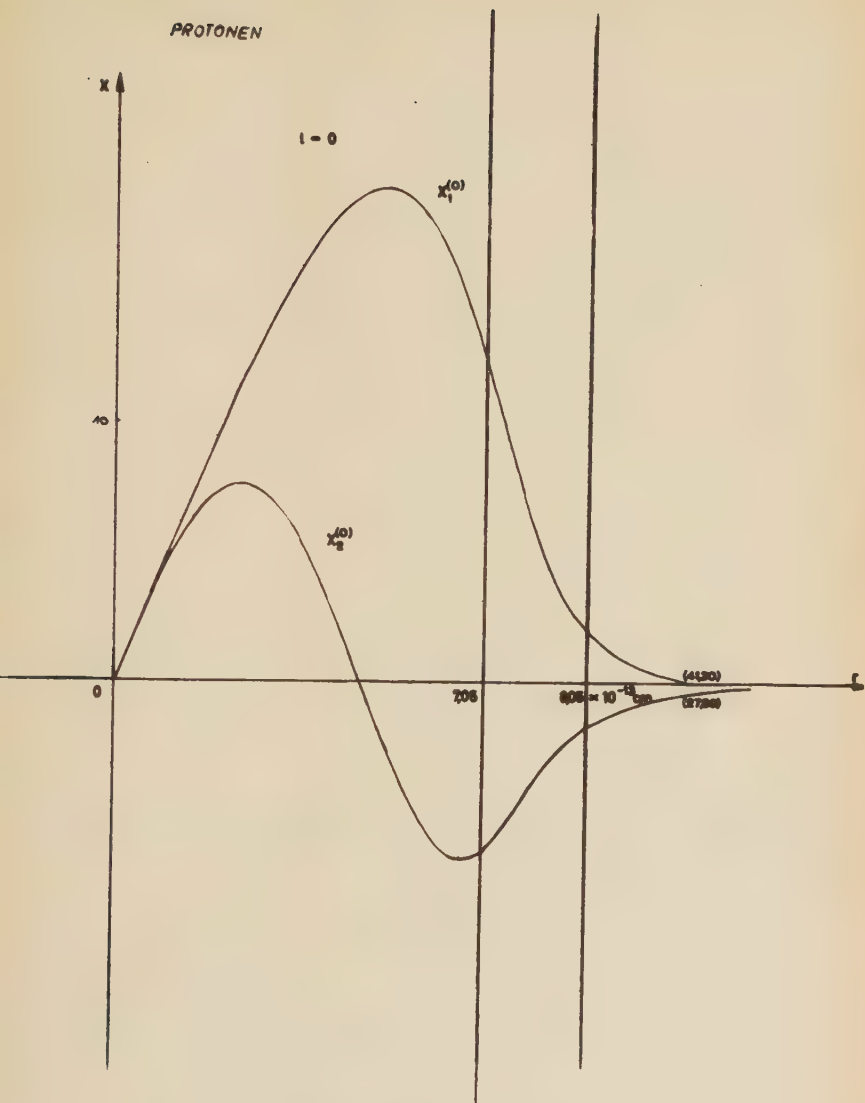


Protonen - Potential

$$l = 0: \chi_3^0, E_3^0 = - 992 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$



PROTONEN



x

Protonen - Potential

$$I = 2: X_2^{(2)} E_2^{(2)} = - 9,77 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

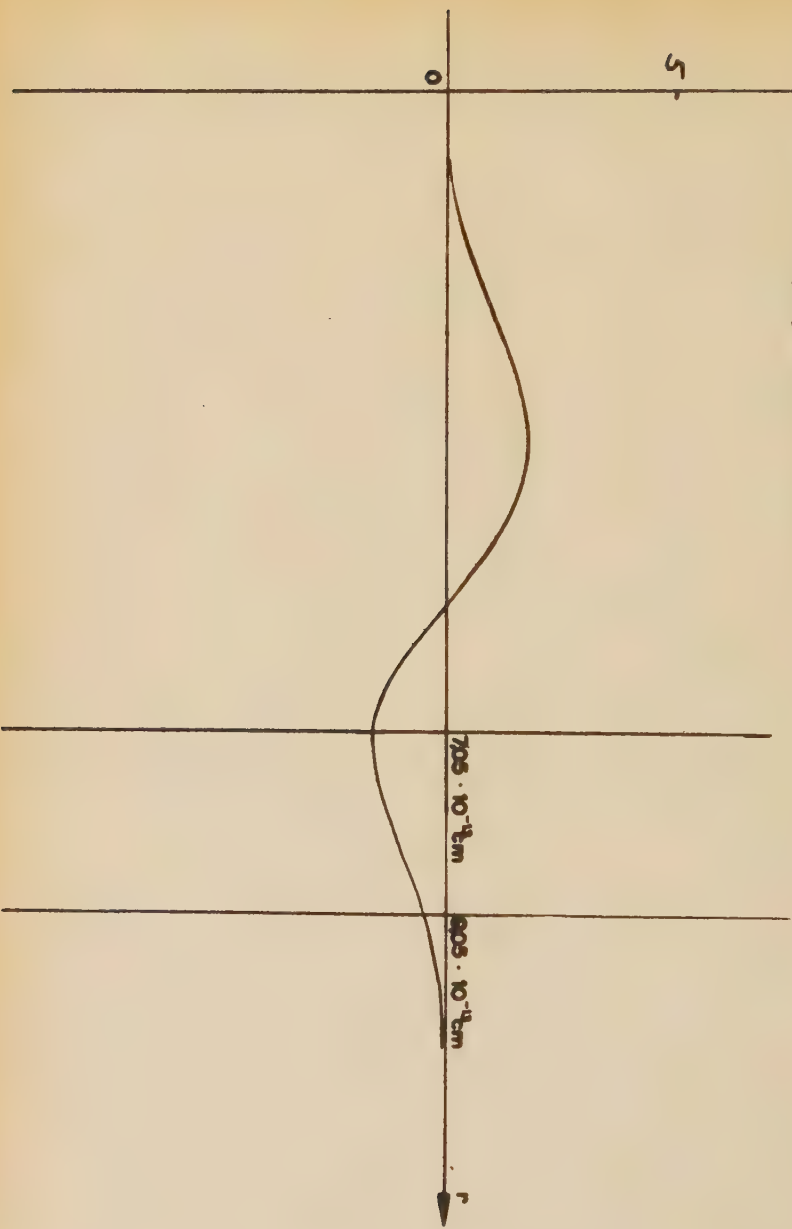
5

0

$705 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

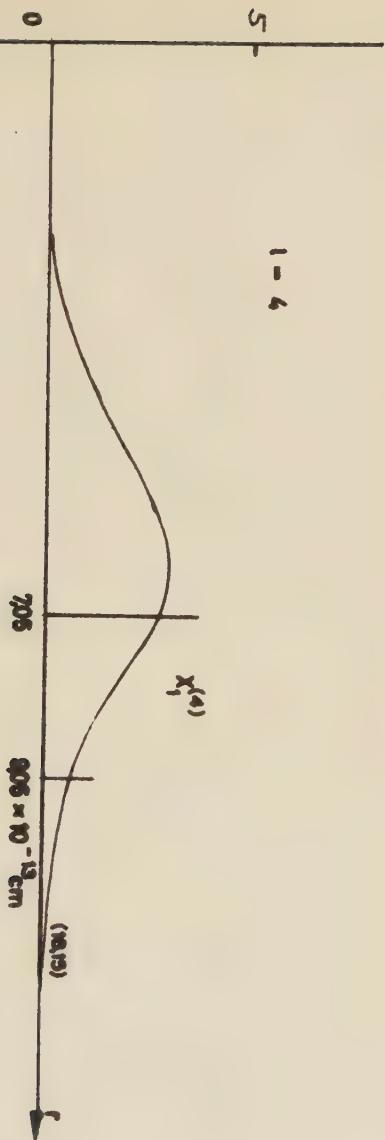
$805 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

r



PROTONEN

1-4

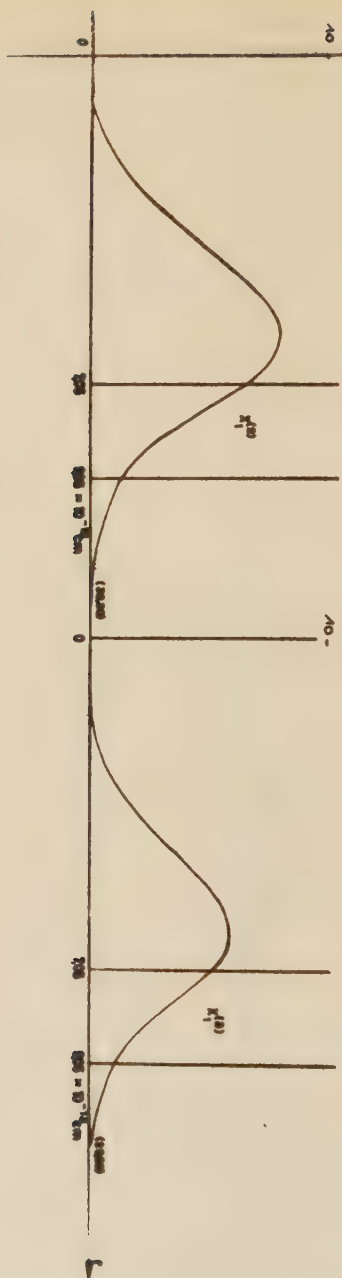


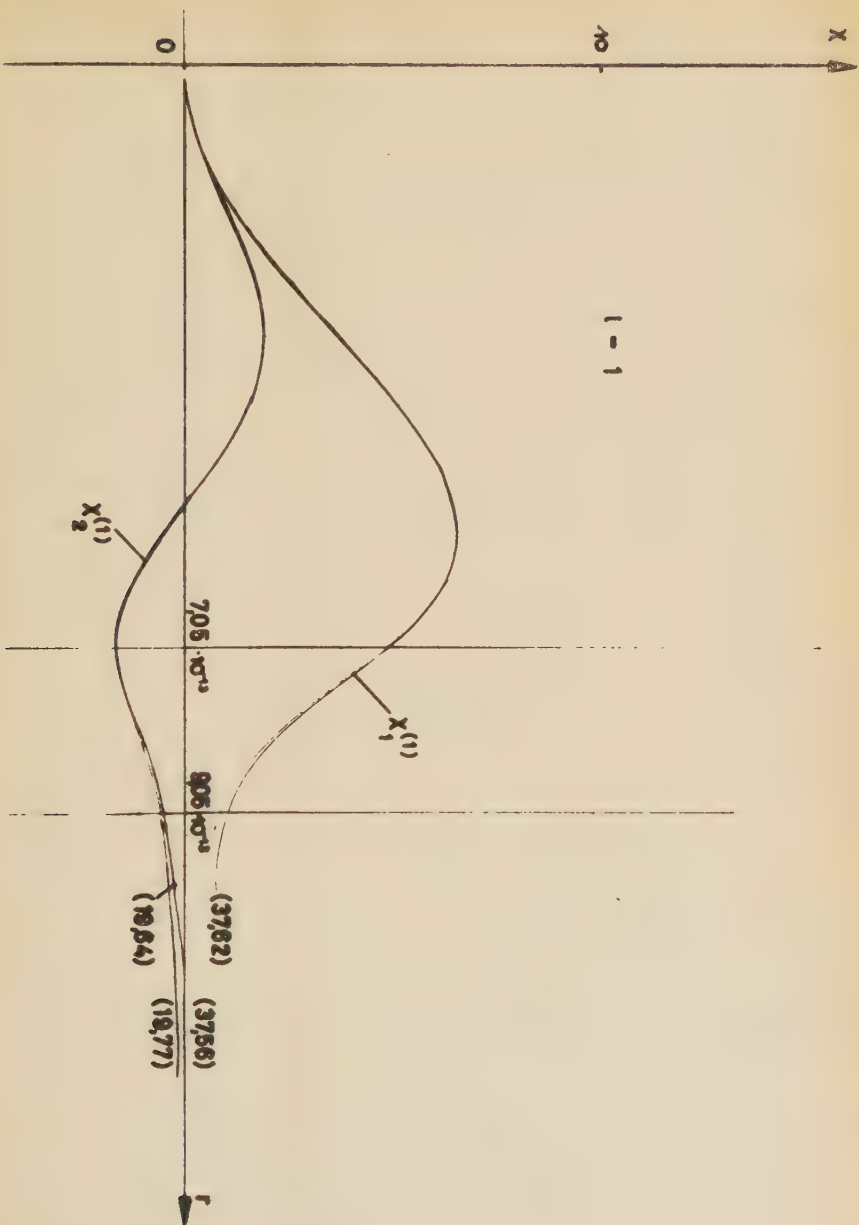
PROTONEN

x 1

l = 2

l = 3





Normierungsintegrale zu § 8

Q	n	<u>Protonen</u>	$\int_0^\infty \chi^2(r) dr$
0	1		1522,40 $\cdot 10^{-13}$
0	2		240,76 $\cdot 10^{-13}$
0	3		436,52 $\cdot 10^{-13}$
1	1		145,63 $\cdot 10^{-13}$
1	2		13,24 $\cdot 10^{-13}$
2	1		198,32 $\cdot 10^{-13}$
2	2		11,48 $\cdot 10^{-13}$
3	1		97,85 $\cdot 10^{-13}$
4	1		24,93 $\cdot 10^{-13}$

<u>Neutronen</u>			
0	1		797,64 $\cdot 10^{-13}$
0	2		209,80 $\cdot 10^{-13}$
0	3		107,98 $\cdot 10^{-13}$
1	1		318,38 $\cdot 10^{-13}$
1	2		41,69 $\cdot 10^{-13}$
2	1		114,08 $\cdot 10^{-13}$
2	2		8,72 $\cdot 10^{-13}$
3	1		59,5 $\cdot 10^{-13}$
3	2		14,72 $\cdot 10^{-13}$
4	1		14,90 $\cdot 10^{-13}$
5	1		16,86 $\cdot 10^{-13}$

Eigenfunktionen zu § 9

x

l = 0 s = 0

3

2

a

1

b

c

0

5

10

-1

-2

$$X_{(a)}^{(1,2)}; E_{(a)}^{(1,2)}$$

$$a) X_{(11)}^{(10,0)}; E_{(11)}^{(10,0)} = -147,0 \cdot 10^{-3} \text{ erg}; \int X^2 dr = 18,15 \cdot 10^{-3}$$

$$b) X_{(12)}^{(10,0)}; E_{(12)}^{(10,0)} = -102,1 \cdot 10^{-3} \text{ erg}; \int X^2 dr = 5,35 \cdot 10^{-3}$$

$$c) X_{(21)}^{(10,0)}; E_{(21)}^{(10,0)} = -45,00 \cdot 10^{-3} \text{ erg}; \int X^2 dr = 3,35 \cdot 10^{-3}$$

NEUTRONEN

15

$\sim 10^{-12} \text{ cm}$



$$-(A + V_1 y) X'' + [-V_2 y - E + \frac{\lambda}{2m} \frac{A}{c^2} V_2 \frac{x}{r} y'] + (A + V_1 y) \frac{1(1+1)}{r^2} X = 0$$

$$\text{Randbedingungen: } X(0) = 0$$

$$X(\infty) = 0$$

$$A = \frac{\hbar^2}{2m} = 3,31795 \cdot 10^{-31} \text{ erg cm}^2$$

$$y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\beta}(r-a)}}$$

$$\hbar = 6,623 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec}$$

$$\beta = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$a = 7,16 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$$

$$V_1 = 1,54 \frac{\hbar^2}{2m} = 5,10057 \cdot 10^{-30} \text{ erg cm}^2$$

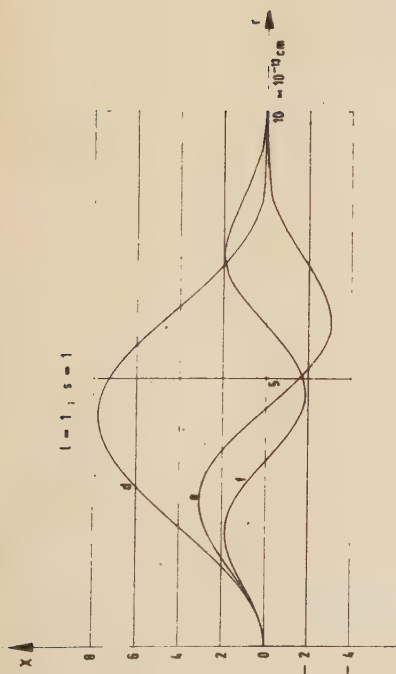
$$m = 1,6747 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

$$V_2 = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ erg}$$

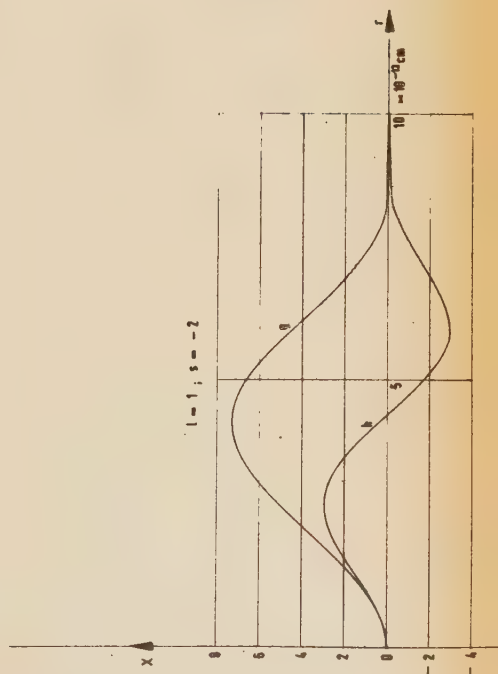
$$\lambda = 39,5$$

$$c = 2,98793 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$$

NEUTRONEN



d) $X_{(1)}^{(1,1)}; E_{(1)}^{(1,1)}$	=	-	$130.70 \cdot 10^{-6} \text{ erg};$	$\int X^2 dr = 192.0 \cdot 10^{-10}$
e) $X_{(2)}^{(1,1)}; E_{(2)}^{(1,1)}$	=	-	$78.35 \cdot 10^{-6} \text{ erg};$	$\int X^2 dr = 34.15 \cdot 10^{-10}$
f) $X_{(3)}^{(1,1)}; E_{(3)}^{(1,1)}$	=	-	$23.92 \cdot 10^{-6} \text{ erg};$	$\int X^2 dr = 15.43 \cdot 10^{-10}$



g) $X_{(1)}^{(1,-2)}; E_{(1)}^{(1,-2)}$	=	-	$128.5 \cdot 10^{-6} \text{ erg};$	$\int X^2 dr = 185.0 \cdot 10^{-10}$
h) $X_{(2)}^{(1,-2)}; E_{(2)}^{(1,-2)}$	=	-	$78.23 \cdot 10^{-6} \text{ erg};$	$\int X^2 dr = 31.25 \cdot 10^{-10}$

NEUTRONEN

χ

$l = 3 \quad s = 3$



$$m) \quad \chi_{(11)}^{(2,3)} : \epsilon_{(11)}^{(2,3)} = -918 \cdot 10^{-6} \text{ erg}; \quad \int \chi^2 dr = 68945 \cdot 10^{-13}$$

$$n) \quad \chi_{(11)}^{(2,3)} : \epsilon_{(11)}^{(2,3)} = -320 \cdot 10^{-6} \text{ erg}; \quad \int \chi^2 dr = 7891 \cdot 10^{-13}$$

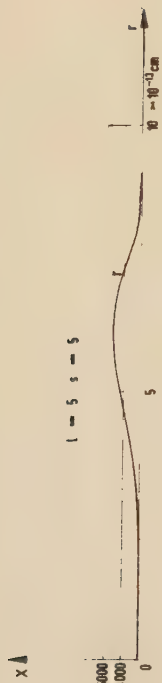
χ

$l = 3 \quad s = 4$



$$0) \quad \chi_{(11)}^{(2,4)} : \epsilon_{(11)}^{(2,4)} = -817 \cdot 10^{-6} \text{ erg}; \quad \int \chi^2 dr = 42305 \cdot 10^{-13}$$

NEUTRONEN



$$r) \quad X_{(1)}^{(5,5)} : \quad \varepsilon_{(1)}^{(5,5)} = -44.50 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int X^2 dr = 53\,900\,000 \cdot 10^{-13}$$



$$s) \quad X_{(1)}^{(5,6)} : \quad \varepsilon_{(1)}^{(5,6)} = -26.40 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int X^2 dr = 22\,490\,000 \cdot 10^{-13}$$



$$t) \quad X_{(1)}^{(6,8)} : \quad \varepsilon_{(1)}^{(6,8)} = -23.25 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int X^2 dr = 2\,345\,000\,000 \cdot 10^{-13}$$

NEUTRONEN

$x \text{ Å}$

$l = 6 \quad s = 4$

1500

1000

500

0



10^{-12} cm

p) $X_{(1)}^{(4,4)}; E_{(1)}^{(4,4)} = -71,0 \cdot 10^{-6} \text{ erg}; \quad \{X_{(1)}^{(4,4)}\} = 1883.000 \cdot 10^{-13}$

$x \text{ Å}$

$l = 6 \quad s = 5$

1500

1000

500

0

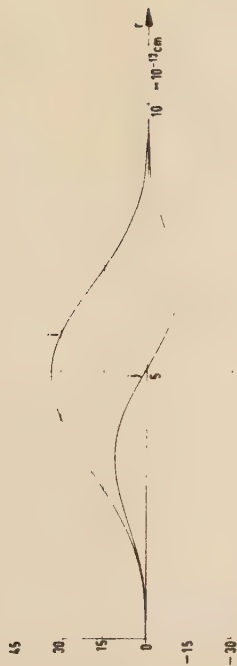


10^{-12} cm

q) $X_{(1)}^{(6,5)}; E_{(1)}^{(6,5)} = -54,3 \cdot 10^{-6} \text{ erg}; \quad \{X_{(1)}^{(6,5)}\} = 865.000 \cdot 10^{-13}$

χ

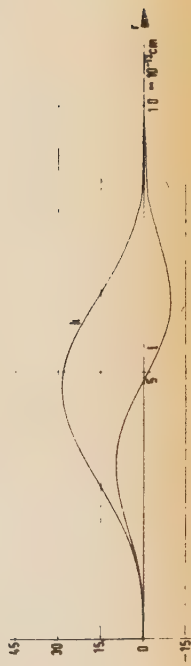
$l = 2 \quad s = 2$



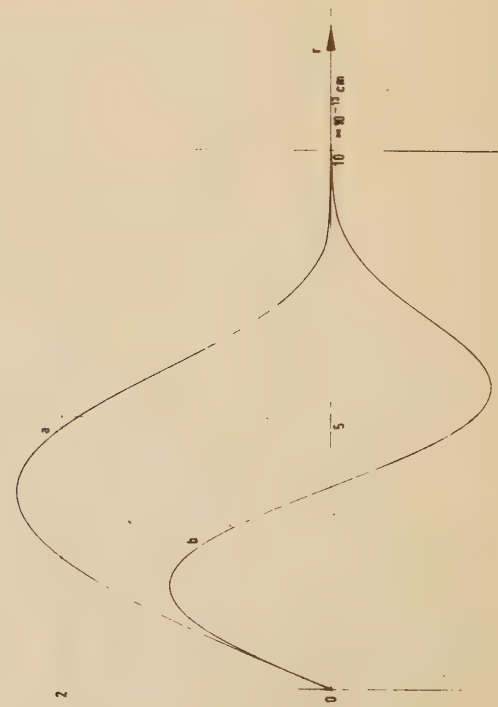
$$\begin{aligned} 1) \quad \chi_{(1)}^{(2,2)} : \quad \epsilon_{(1)}^{(2,2)} &= -111.9 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int \chi^2 dr = 3271.1 \cdot 10^{-13} \\ 2) \quad \chi_{(2)}^{(2,2)} : \quad \epsilon_{(2)}^{(2,2)} &= -56.63 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int \chi^2 dr = 412.29 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

χ

$l = 2 \quad s = 3$



$$\begin{aligned} 1) \quad \chi_{(1)}^{(2,3)} : \quad \epsilon_{(1)}^{(2,3)} &= -106.4 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int \chi^2 dr = 2331.0 \cdot 10^{-13} \\ 2) \quad \chi_{(2)}^{(2,3)} : \quad \epsilon_{(2)}^{(2,3)} &= -45.35 \cdot 10^{-6} \text{ erg} ; \quad \int \chi^2 dr = 323.82 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$



$$l = 0 \quad s = 0$$

$$X_{(1)}^{(0,0)}$$

$$E_{(0)}^{(0,0)}$$

$$a) \quad X_{(1)}^{(0,0)} :$$

$$E_{(1)}^{(0,0)} = -12374 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

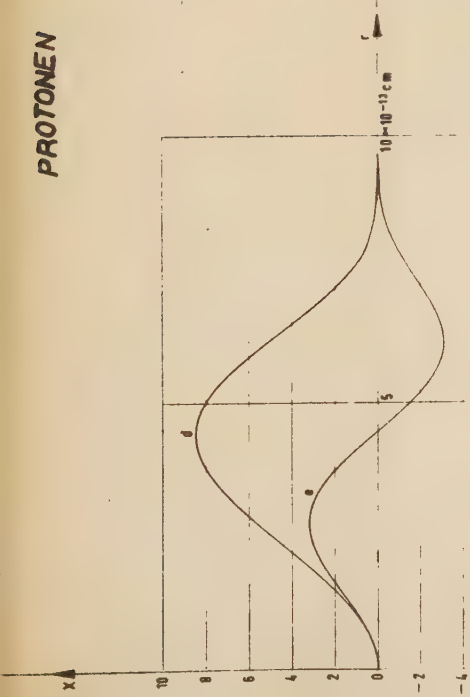
$$\int X^2 dr = 19.384 \cdot 10^{-13}$$

$$b) \quad X_{(2)}^{(0,0)} :$$

$$E_{(2)}^{(0,0)} = -80.49 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$$\int X^2 dr = 5.622 \cdot 10^{-13}$$

PROTONEN



$$l = 1 \quad s = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } X_{(1)}^{(1,1)} &: E_{(1)}^{(1,1)} = -108,20 \cdot 10^{-6} \text{ erg} \\ &\int X^2 dr = 226,2 \cdot 10^{-13} \\ \text{e) } X_{(2)}^{(1,1)} &: E_{(2)}^{(1,1)} = -55,10 \cdot 10^{-6} \text{ erg} \\ &\int X^2 dr = 37,0 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

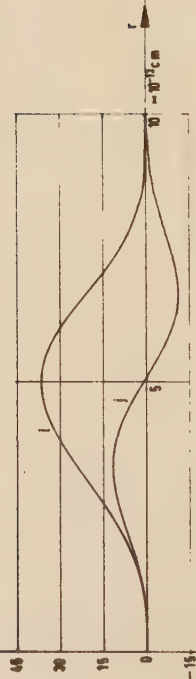


$$l = 1 \quad s = -2$$

$$\begin{aligned} \text{g) } X_{(1)}^{(1,-2)} &: E_{(1)}^{(1,-2)} = -106,90 \cdot 10^{-6} \text{ erg} \\ &\int X^2 dr = 196,5 \cdot 10^{-13} \\ \text{h) } X_{(2)}^{(1,-2)} &: E_{(2)}^{(1,-2)} = -51,40 \cdot 10^{-6} \text{ erg} \\ &\int X^2 dr = 34,05 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

PROTONEN

x



$$l = 2 \quad s = 2$$

i) $X_{(1)}^{(2,2)}$:	$E_{(1)}^{(2,2)}$	$=$	$-91,70 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$	$\int X^2 dr$	$=$	$3955,0 \cdot 10^{-13}$
j) $X_{(2)}^{(2,2)}$:	$E_{(2)}^{(2,2)}$	$=$	$-33,65 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$	$\int X^2 dr$	$=$	$480,5 \cdot 10^{-13}$

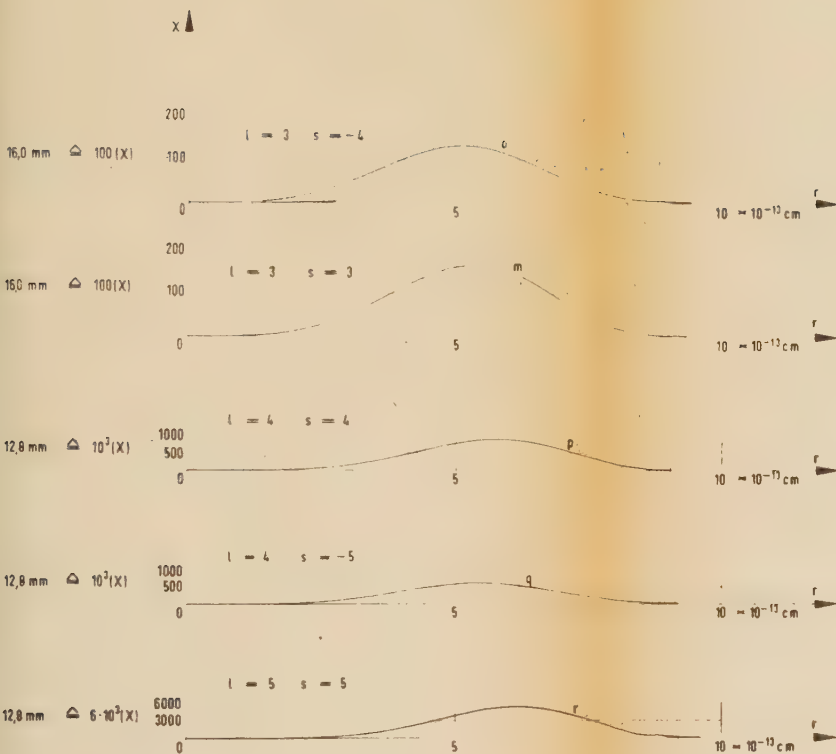
x



$$l = 2 \quad s = -3$$

k) $X_{(1)}^{(2,-3)}$:	$E_{(1)}^{(2,-3)}$	$=$	$-85,80 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$	$\int X^2 dr$	$=$	$2820,0 \cdot 10^{-13}$
l) $X_{(2)}^{(2,-3)}$:	$E_{(2)}^{(2,-3)}$	$=$	$-23,92 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$	$\int X^2 dr$	$=$	$351,2 \cdot 10^{-13}$

PROTONEN



$$o) \chi_{(11)}^{(12,-4)} : E_{(11)}^{(12,-4)} = -60,95 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$$\int \chi^2 dr = 47000 \cdot 10^{-13}$$

$$m) \chi_{(11)}^{(12,3)} : E_{(11)}^{(12,3)} = -70,80 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$$\int \chi^2 dr = 73100 \cdot 10^{-13}$$

$$p) \chi_{(11)}^{(14,4)} : E_{(11)}^{(14,4)} = -51,24 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$$\int \chi^2 dr = 2055000 \cdot 10^{-13}$$

$$q) \chi_{(11)}^{(14,-5)} : E_{(11)}^{(14,-5)} = -33,65 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$$\int \chi^2 dr = 970000 \cdot 10^{-13}$$

$$r) \chi_{(11)}^{(15,5)} : E_{(11)}^{(15,5)} = -32,05 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$$\int \chi^2 dr = 71750000 \cdot 10^{-13}$$

Normierungsintegrale zu § 9

Neutronen

n	l	$s = \begin{pmatrix} l \\ -(l+1) \end{pmatrix}$	$\int_0^\infty \chi^2(\tau) d\tau$
3	1	1	$15,43 \cdot 10^{-13}$
1	5	-6	$22\,490\,000,00 \cdot 10^{-13}$
1	6	6	$2\,345\,000\,000,00 \cdot 10^{-13}$
2	3	3	$7\,891,00 \cdot 10^{-13}$
2	2	-3	$323,82 \cdot 10^{-13}$
3	0	0	$3,35 \cdot 10^{-13}$
1	5	5	$53\,900\,000,00 \cdot 10^{-13}$
2	2	2	$412,29 \cdot 10^{-13}$
1	4	-5	$865\,000,00 \cdot 10^{-13}$
1	4	4	$1\,883\,000,00 \cdot 10^{-13}$
2	1	-2	$31,25 \cdot 10^{-13}$
2	1	1	$34,15 \cdot 10^{-13}$
1	3	-4	$42\,305,00 \cdot 10^{-13}$
1	3	3	$68\,945,00 \cdot 10^{-13}$
2	0	0	$5,35 \cdot 10^{-13}$
1	2	-3	$2\,331,00 \cdot 10^{-13}$
1	2	2	$3\,271,00 \cdot 10^{-13}$
1	1	-2	$165,00 \cdot 10^{-13}$
1	1	1	$192,00 \cdot 10^{-13}$
1	0	0	$16,51 \cdot 10^{-13}$

Protonen

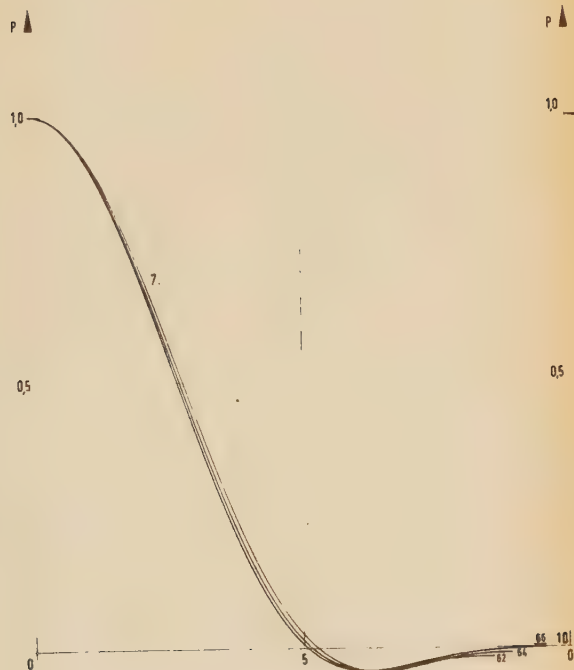
$$s = \begin{pmatrix} e \\ -(e+1) \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\infty} x^s(r) dr$$

2	2	-3	351,2	$\cdot 10^{-13}$
1	5	5	71 750 000,0	$\cdot 10^{-13}$
2	2	2	480,5	$\cdot 10^{-13}$
1	4	-5	970 000,0	$\cdot 10^{-13}$
1	4	4	2 055 000,0	$\cdot 10^{-13}$
2	1	-2	34,05	$\cdot 10^{-13}$
2	1	1	37,00	$\cdot 10^{-13}$
1	3	-4	47 000,00	$\cdot 10^{-13}$
1	3	3	73 100,00	$\cdot 10^{-13}$
2	0	0	5,622	$\cdot 10^{-13}$
1	2	-3	2 820,00	$\cdot 10^{-13}$
1	2	2	3 855,00	$\cdot 10^{-13}$
1	1	-2	196,50	$\cdot 10^{-13}$
1	1	1	244,20	$\cdot 10^{-13}$
1	0	0	19,384	$\cdot 10^{-13}$

Beispiele zur Eigenwertbestimmung

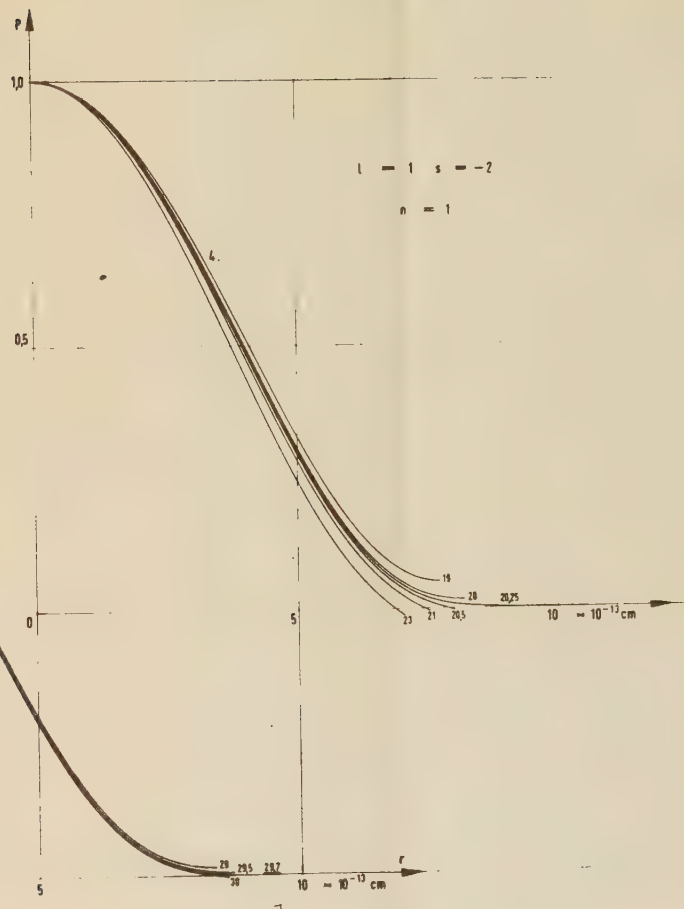
„EINSCHIESSKURVEN“ (BEISPIELE)



$l = 2 \quad s = 2$
 $n = 2$



$l = 2 \quad s = 2$
 $n = 1$



$l = 1 \quad s = -2$
 $n = 1$

„EINSCHIESSKURVEN“

(BEISPIELE)

l = 0 s = 0

x

1

0

-1

c

100 mm $\triangle$ 1X

x

4

2

0

-2

-4

a

b

5

10

50 mm $\triangle$ 1X

70

71

71.5

71.9

71.95

71.97

71.98

71.99

72

72.0

72.05

72.1

72.15

72.2

72.3

72.35

72.4

72.5

72.6

72.7

72.8

72.9

73

73.05

73.1

73.15

73.2

73.25

73.3

73.35

73.4

73.45

73.5

73.55

73.6

73.65

73.7

73.75

73.8

73.85

73.9

73.95

74

74.05

74.1

74.15

74.2

74.25

74.3

74.35

74.4

74.45

74.5

74.55

74.6

74.65

74.7

74.75

74.8

74.85

74.9

74.95

75

75.05

75.1

75.15

75.2

75.25

75.3

75.35

75.4

75.45

75.5

75.55

75.6

75.65

75.7

75.75

75.8

75.85

75.9

75.95

76

76.05

76.1

76.15

76.2

76.25

76.3

76.35

76.4

76.45

76.5

76.55

76.6

76.65

76.7

76.75

76.8

76.85

76.9

76.95

77

77.05

77.1

77.15

77.2

77.25

77.3

77.35

77.4

77.45

77.5

77.55

77.6

77.65

77.7

77.75

77.8

77.85

77.9

77.95

78

78.05

78.1

78.15

78.2

78.25

78.3

78.35

78.4

78.45

78.5

78.55

78.6

78.65

78.7

78.75

78.8

78.85

78.9

78.95

79

79.05

79.1

79.15

79.2

79.25

79.3

79.35

79.4

79.45

79.5

79.55

79.6

79.65

79.7

79.75

79.8

79.85

79.9

79.95

80

80.05

80.1

80.15

80.2

80.25

80.3

80.35

80.4

80.45

80.5

80.55

80.6

80.65

80.7

80.75

80.8

80.85

80.9

80.95

81

81.05

81.1

81.15

81.2

81.25

81.3

81.35

81.4

81.45

81.5

81.55

81.6

81.65

81.7

81.75

81.8

81.85

81.9

81.95

82

82.05

82.1

82.15

82.2

82.25

82.3

82.35

82.4

82.45

82.5

82.55

82.6

82.65

82.7

82.75

82.8

82.85

82.9

82.95

83

83.05

83.1

83.15

83.2

83.25

83.3

83.35

83.4

83.45

83.5

83.55

83.6

83.65

83.7

83.75

83.8

83.85

83.9

83.95

84

84.05

84.1

84.15

84.2

84.25

84.3

84.35

84.4

84.45

84.5

84.55

84.6

84.65

84.7

84.75

84.8

84.85

84.9

84.95

85

85.05

85.1

85.15

85.2

85.25

8

Lebenslauf

Am 4. 9. 1922 wurde ich als Sohn des Kaufmannes Walter von Kenschitzki und seiner Ehefrau Irene, geb. Gräfin Dankelmann in Utrecht (Holland) geboren.

Während meiner ersten Schuljahre erhielt ich auf dem Gut meiner Großeltern in der Nähe von Breslau Privatunterricht. Von 1931 bis 1936 besuchte ich das Pädagogium Alpinum in Garmisch-Partenkirchen und von 1936 bis 1939 die Privatschule von Dr. Griebel in Berlin-Schlachtensee. 1939 trat ich in die Lilienthal-Oberschule in Berlin-Lichterfelde ein und legte dort im März 1941 die Reifeprüfung ab.

Anschließend wurde ich zur Wehrmacht eingezogen und geriet 1945 als Reserveoffizier in russische Gefangenschaft, aus der ich im Sommer 1949 zurückkehrte.

Zum Wintersemester 1949/50 ließ ich mich an der Ludwig-Maximilians-Universität zu München immatrikulieren, wo ich 1952 die Diplom-Vorprüfung ablegte und jetzt um Zulassung zur Doktorprüfung gebeten habe.

